

Universidade do Minho
Escola de Ciências

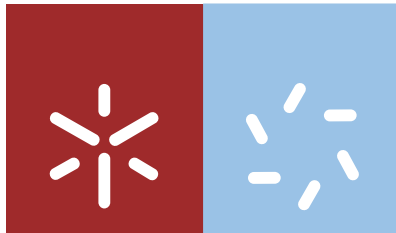
Andreia José Pires Casas Fernandes

Conjugação Isogonal

Andreia José Pires Casas Fernandes

UMinho | 2012

Outubro de 2012



Universidade do Minho

Escola de Ciências

Andreia José Pires Casas Fernandes

Conjugação Isogonal

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores
Área de Especialização em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação da
Doutora Lucile Vandembroucq

Outubro de 2012

DECLARAÇÃO

Nome: Andreia José Pires Casas Fernandes

Título dissertação: Conjugação Isogonal

Orientadora: Doutora Lucile Vandembroucq

Ano de conclusão: 2012

Designação do Mestrado: Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores,
Área de Especialização em Matemática

Nos exemplares das teses de doutoramento ou de mestrado ou de outros trabalhos entregues para prestação de provas públicas nas universidades ou outros estabelecimentos de ensino, e dos quais é obrigatoriamente enviado um exemplar para depósito legal na Biblioteca Nacional e, pelo menos outro para a biblioteca da universidade respectiva, deve constar uma das seguintes declarações:

É autorizada a reprodução integral desta dissertação apenas para efeitos de investigação, mediante declaração escrita do interessado, que a tal se compromete.

Universidade do Minho, 08 de Outubro de 2012

O autor: Andreia José Pires Casas Fernandes

Assinatura: Andreia José Pires Casas Fernandes

À minha família
pelo apoio e compreensão

AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho resultou de grande empenho e dedicação, o que me permitiu atingir os objetivos inicialmente estabelecidos. No entanto, tenho ainda a agradecer a colaboração e apoio de algumas pessoas que me ajudaram no decorrer de todo o processo.

À Doutora Lucile Vandembrouq, orientadora deste trabalho, pelo apoio, disponibilidade e qualidade de sugestões prestadas no decorrer de todo este percurso.

À minha irmã e colega, Luisa Fernandes, por me ter acompanhado, apoiado e auxiliado em todos os momentos desta minha caminhada. Agradeço todo o seu apoio e disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais por toda a compreensão e ajuda dispendida ao longo da vida e particularmente durante esta etapa que por vezes foi tão dura, mas sempre me ajudaram e deram ânimo para continuar em frente.

Ao meu marido e filho, pela paciência, carinho, compreensão e apoio.

E, de modo a salvaguardar a omissão de alguém, agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e me apoiaram em todo o meu percurso académico.

RESUMO

Conjugação Isogonal

Este trabalho incidiu no estudo da conjugação isogonal, de uma forma sintética e analítica; neste âmbito, o estudo debruça-se sobre os conjugados isogonais de alguns pontos notáveis do triângulo, nomeadamente, do baricentro, ortocentro, circuncentro, incentro e dos pontos de Brocard. Um dos conjugados isogonais antes mencionado a que é dado maior relevo é o conjugado do baricentro, também conhecido como ponto de Lemoire.

Outro objetivo foi utilizar as novas tecnologias, especificamente o programa Geogebra de Geometria Dinâmica, quer como apoio na obtenção de resultados quer como meio de visualização dos mesmos.

ABSTRACT

Isogonal Conjugation

This paper focused on the study of isogonal conjugate in a synthetic and analytical way. In this context, the study focuses on the isogonal conjugate of some notable points of the triangle, namely the centroid, orthocenter, circumcenter, incenter and Brocard points. One of the aforementioned isogonal conjugates which is given more emphasis is the centroid conjugate, also known as Lemoine point.

Another goal of this paper was to use an available Dynamic Geometry software, specifically Geogebra, either as support in obtaining results or as a means of visualization.

Índice

Notações	2
1 Introdução	3
2 Conceitos Básicos de Geometria Euclidiana	5
3 Teorema de Ceva e suas Aplicações	13
3.1 Teorema de Ceva	13
3.2 Pontos notáveis de um triângulo	15
4 Conjugados Isogonais	27
4.1 Conjugação Isogonal	27
4.2 Ortocentro e Circuncentro - Construção no Geogebra	30
5 Ponto de Lemoine e Pontos de Brocard	35
5.1 Conjugação e distância aos lados do triângulo	35
5.2 Ponto de Lemoine	38
5.3 Pontos de Brocard	51
Bibliografia	57

Notações

- Reta que passa pelos pontos A e B - (AB)
- Semirreta de origem A que passa por B - \dot{AB}
- Segmento de reta de extremidades A e B - $[AB]$
- Medida ou Comprimento do segmento $[AB]$ - AB
- Ângulo definido pelas semirretas \dot{AB} e \dot{AC} - $\angle BAC$
- Medida ou Amplitude do ângulo $\angle BAC$ - \widehat{BAC}
- Triângulo de vértices A, B e C - $\triangle ABC$
- Ângulos do triângulo ABC - $\angle A, \angle B, \angle C$
- Medida ou Amplitude dos ângulos do triângulo $\triangle ABC$ - $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$
- Área do triângulo ABC - (ABC)
- Segmentos de reta congruentes - $[AB] \equiv [A'B']$
- Ângulos congruentes - $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$

Capítulo 1

Introdução

“...A formulação mais distinta e bela de qualquer verdade terá de assumir uma forma matemática”

Henry David Thoreau

Etimologicamente a palavra “isogonal” significa mesmo ângulo. A conjugação isogonal que vamos estudar nesta dissertação é uma transformação que associa a um ponto interior de um dado triângulo outro ponto interior mantendo iguais determinados ângulos. No capítulo 4 apresentaremos a definição específica de conjugação isogonal bem como o teorema que fundamenta a existência desta transformação (Teorema Fundamental dos Conjugados Isogonais). O objetivo deste trabalho foi estudar os conjugados isogonais de alguns pontos notáveis do triângulo. Verificaremos assim no capítulo 4 que, dado um triângulo, o conjugado isogonal do ortocentro, ponto de interseção das alturas, é o circuncentro, ponto de interseção das mediatrizes. O capítulo 5 é dedicado em primeiro lugar ao conjugado isogonal do baricentro, ponto de interseção das medianas. Este ponto é chamado Ponto de Lemoine ou Ponto Semediano e goza de propriedades notáveis que são apresentadas neste mesmo capítulo. Na última parte do capítulo 5 estudamos os chamados Pontos de Brocard que se revelam conjugados um do outro. As referências bibliográficas principais, para a elaboração deste trabalho foram os livros de Ross Honsberger [1] e de Roger Johnson [2].

Após o estudo de várias demonstrações do Teorema Fundamental dos Conjugados Isogonais optou-se pela apresentação neste trabalho de uma prova baseada no Teorema de Ceva. Este teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que, num triângulo, três segmentos de reta que unem os vértices aos lados opostos concorram num

ponto. Este teorema é apresentado no capítulo 3 e no mesmo capítulo é usado para a prova da existência de alguns pontos notáveis do triângulo nomeadamente o baricentro, o incentro, o ortocentro, o circuncentro e o ponto de Gergonne.

O quadro de trabalho desta tese assenta na Geometria Euclidiana. No capítulo 2 são apresentadas noções e resultados elementares da Geometria Euclidiana que vão servir como um apoio para o restante trabalho. Todas as figuras apresentadas neste trabalho foram elaboradas usando o programa Geogebra. Este programa foi também usado como uma ferramenta de apoio, bem como meio de visualização de resultados. Em particular, implementou-se a conjugação isogonal relativa a um triângulo neste programa.

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Geometria Euclidiana

“ Na pintura, o ponto é o elemento primário”

Vassily Kandinsky

Este trabalho vai ser assente na Geometria Euclideana e vai tomar como referência de trabalho o livro “Curso de Geometria” de Paulo Ventura Araújo (ver [9]).

Vão ser assumidas todas as noções listadas nas notações (pág. 2) e para além destas serão assumidos o conceito de semiplano definido por uma reta e um ponto exterior à reta; vários conceitos relacionados com ângulos como interior de um ângulo, ângulos suplementares, ...; e ainda os conceitos de interior de um triângulo; circunferência, arco de circunferência e tangente a uma circunferência.

Em seguida vamos especificar alguns conceitos e resultados necessários para a elaboração de algumas demonstrações expostas ao longo deste trabalho.

Começamos por recordar as noções de triângulos congruentes e semelhantes bem como os clássicos critérios de congruência e semelhança.

Definição 2.0.1 (Congruência de triângulos). *Dizemos que dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes quando são congruentes os lados e os ângulos internos, isto é,*

$$\begin{array}{lll} [AB] \equiv [A'B'] & [BC] \equiv [B'C'] & [CA] \equiv [C'A'] \\ \angle ABC \equiv \angle A'B'C' & \angle BCA \equiv \angle B'C'A' & \angle CAB \equiv \angle C'A'B' \end{array}$$

Se $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ forem congruentes, escrevemos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Teorema 2.0.2 (Critérios de congruência de triângulos). *Sejam $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ dois triângulos.*

1. **Caso LAL** (lado, ângulo, lado)

Se $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$ e $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.



2. **Caso ALA** (ângulo, lado, ângulo)

Se $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ e $[AB] \equiv [A'B']$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.



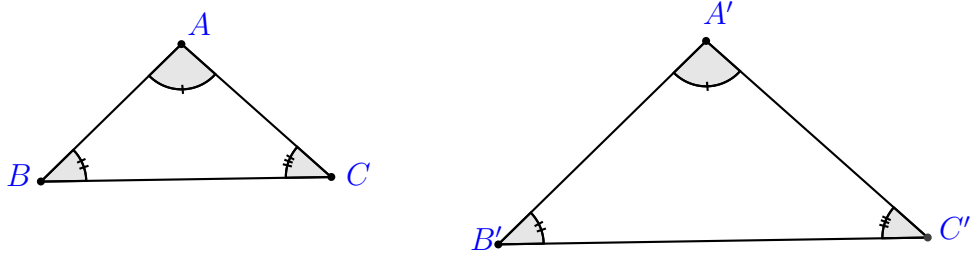
3. **Caso LLL** (lado, lado, lado)

Se $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$ e $[CA] \equiv [C'A']$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.



Definição 2.0.3 (Semelhança de triângulos). *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são ditos semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) se $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ e*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Teorema 2.0.4 (Critérios de semelhança de triângulos).

1. **Caso AAA** (ângulo, ângulo, ângulo)

Se dois triângulos tiverem ângulos internos congruentes dois a dois então são semelhantes, isto é, se os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ forem tais que $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$ e $\angle C \equiv \angle C'$ então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

Em particular, se dois triângulos têm dois pares de ângulos congruentes, então são semelhantes (caso AA).

2. **Caso LAL** (lado, ângulo, lado)

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \lambda$.

Então tem-se também que $\frac{BC}{B'C'} = \lambda$ e os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

3. **Caso LLL** (lado, lado, lado)

Dois triângulos com lados proporcionais são semelhantes, isto é, se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

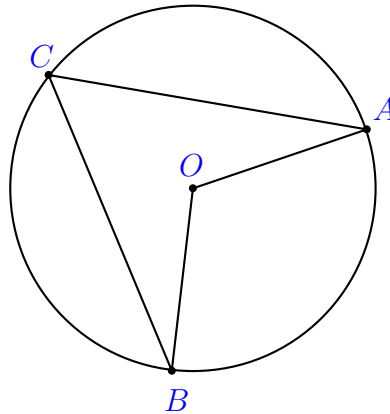
Recordemos agora alguns resultados sobre ângulos inscritos numa figura geométrica

Definição 2.0.5 (Ângulo inscrito). *Um ângulo diz-se inscrito numa circunferência \mathcal{C} quando o seu vértice pertence a \mathcal{C} e cada um dos seus lados intersesta \mathcal{C} num segundo ponto diferente do vértice.*

Definição 2.0.6 (Ângulo ao centro). *Um ângulo diz-se ao centro numa circunferência \mathcal{C} quando o seu vértice incide com o centro de \mathcal{C} e cada um dos seus lados intersesta \mathcal{C} num ponto.*

Teorema 2.0.7 (Arco capaz). *Sejam A e B pontos não diametralmente opostos de uma circunferência de centro O .*

a) *Se C é um ponto de arco maior definido por A e B então $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$.*



Em particular, o ângulo $\angle ACB$ tem medida constante e $\widehat{ACB} < 90^\circ$.

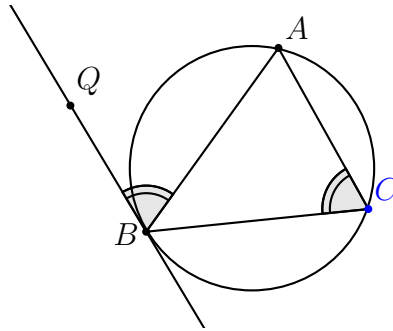
b) *Se C é um ponto do arco menor de extremos A e B então $\widehat{ACB} = 180^\circ - \frac{\widehat{AOB}}{2}$.*

Em particular, o ângulo $\angle ACB$ tem medida constante e $\widehat{ACB} > 90^\circ$.

Note-se que se C é um ponto do arco maior e C' é um ponto do arco menor, então os ângulos $\angle ACB$ e $\angle AC'B$ são suplementares: $\widehat{ACB} + \widehat{AC'B} = 180^\circ$.

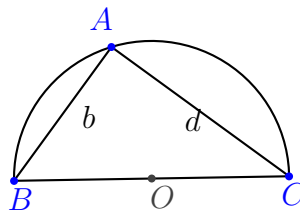
Considerando no teorema anterior a situação limite em que o ponto C tende para o ponto B obtemos o seguinte resultado

Proposição 2.0.8 (Tangentes e cordas). *Seja \mathcal{C} uma circunferência, $[AC]$ uma corda de \mathcal{C} . Dado um ponto B de \mathcal{C} designar-se-á por t_B a tangente a \mathcal{C} em B . O ângulo formado por duas cordas $[CA]$ e $[CB]$ é congruente com o ângulo formado pela corda $[AB]$ e $[BQ]$, onde Q é um ponto de reta tangente t_B pertencente ao semiplano definido pela reta (CB) e pelo ponto A .*



No caso de um triângulo inscrito numa semicircunferência temos o seguinte resultado:

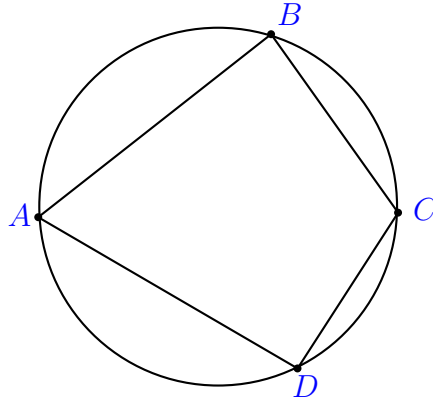
Teorema 2.0.9. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja O o ponto médio do segmento $[BC]$. Então $\angle BAC$ é recto se e só se $OA=OB=OC$.*



Tratamos agora de quadriláteros inscritos numa circunferência.

Definição 2.0.10 (Quadrilátero convexo). *Seja $ABCD$ um quadrilátero. O quadrilátero $ABCD$ é dito convexo se para cada par de vértices consecutivos os outros dois vértices se encontram do mesmo lado da reta que contém esses vértices.*

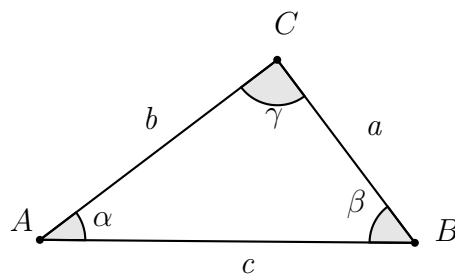
Proposição 2.0.11 (Quadrilátero inscrito numa circunferência). *Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito numa circunferência se e só se os pares de ângulos opostos, isto é, $\angle ABC$ e $\angle CDA$ por um lado e $\angle BAC$ e $\angle BCD$ por outro, são suplementares.*



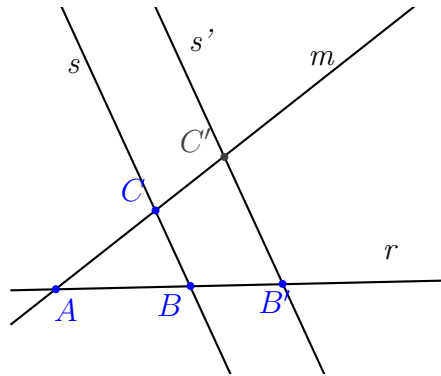
Usaremos também os seguintes teoremas clássicos:

Teorema 2.0.12 (Lei dos Senos). *Seja ABC um triângulo onde a é o comprimento do lado BC , b é o comprimento do lado AC , c é o comprimento do lado AB e ainda α , β e γ as medidas dos ângulos interiores como na figura seguinte tem-se*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Definição 2.0.13 (Teorema de Tales). *Sejam r e m duas rectas do plano incidentes num ponto A e sejam s e s' duas rectas incidentes em r e m , respectivamente em pontos B , C , B' e C' . Suponha que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle B'AC'$ são iguais ou verticalmente opostos. Então as rectas s e s' são paralelas se e só se $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.*



Recorde-se que, dada uma reta r e um ponto A não pertencente a esta reta, existe uma única reta s perpendicular a r que passa por A . Ao ponto de interseção das retas r e s chamamos projeção ortogonal de A sobre r . Temos assim a seguinte definição:

Definição 2.0.14 (Distância de um ponto a uma reta). *Dada uma reta r e um ponto A não pertencente a esta reta, a distância de A a r é o comprimento do segmento $[AB]$ onde B é a projeção ortogonal de A sobre r .*

Por fim vamos definir as noções básicas de mediana, altura, mediatriz e bissetriz de um triângulo.

Definição 2.0.15 (Mediana). *Num triângulo, as retas incidentes num vértice e no ponto médio do lado oposto são chamadas medianas do triângulo.*

Definição 2.0.16 (Alturas de um triângulo). *Num triângulo, as retas incidentes num vértice e perpendiculares ao lado oposto são chamadas alturas do triângulo.*

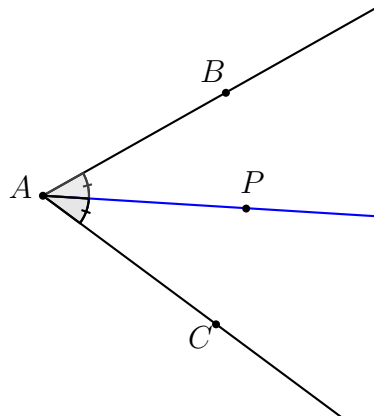
Definição 2.0.17 (Mediatriz). *Chamamos mediatriz de um segmento de reta $[AB]$, à reta perpendicular ao segmento que incide no ponto médio entre A e B .*

Proposição 2.0.18. *Dados dois pontos distintos de A e B no plano, a mediatriz é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de A e B .*

Definição 2.0.19 (Bissetriz). *Sejam \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} duas semirretas de origem A . Uma reta (AP) , onde P está no interior do ângulo $\angle BAC$, diz-se bissetriz do ângulo $\angle BAC$ se*

$$\angle BAP \equiv \angle CAP$$

. À semirreta \overrightarrow{AP} chamamos bissetriz interior do ângulo $\angle BAC$.



Proposição 2.0.20. *Seja $\angle BAC$ um ângulo. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto de pontos que estão à mesma distância das retas (AB) e (AC) .*

Capítulo 3

Teorema de Ceva e suas Aplicações

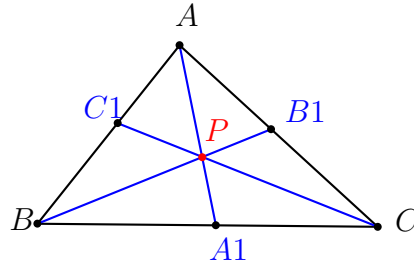
3.1 Teorema de Ceva

Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice a um ponto do lado oposto. Assim, num triângulo $\triangle ABC$ se A_1 , B_1 e C_1 são pontos nos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$ respectivamente, os segmentos de retas $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ são cevianas. Exemplos particulares de cevianas são dados por segmentos das medianas.

Este termo faz referência a Giovanni Ceva (1648-1734), matemático italiano que em 1678 publicou um artigo intitulado *De lineis rectis*, onde apresentou o seu teorema que seguidamente será exposto.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Ceva). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam A_1, B_1, C_1 três pontos distintos dos vértices do $\triangle ABC$ tais que $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$ e $C_1 \in [AB]$. Tem-se que os segmentos de reta $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ são incidentes num ponto P se e só se*

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



Demonstração. Mostremos a primeira implicação.

Seja P o ponto de interseção dos segmentos de reta $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$.

Queremos provar que $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Sabemos que áreas de triângulos com a mesma altura são proporcionais às bases do triângulo. Então,

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{(AA_1C)}{(ABA_1)} = \frac{(PA_1C)}{(PBA_1)} = \frac{(AA_1C) - (PA_1C)}{(ABA_1) - (PBA_1)} = \frac{(CAP)}{(ABP)}$$

De modo análogo,

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{(ABP)}{(BCP)}$$

e

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{(BCP)}{(CAP)}$$

Multiplicando as três razões obtemos,

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{(ABP)}{(BCP)} \cdot \frac{(CAP)}{(ABP)} \cdot \frac{(BCP)}{(CAP)} = 1$$

$$\text{isto é, } \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

Reciprocamente, suponhamos que $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$. Queremos provar que os segmentos de reta $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ interseitam-se num ponto.

Seja P o ponto de interseção de $[AA_1]$ e $[BB_1]$. Vamos provar que $P \in [CC_1]$.

Seja $C_2 = (CP) \cap [AB]$. Observe-se que C_2 pertence ao segmento de reta $[AB]$ e é diferente do ponto A e B .

Usando a 1ª parte do teorema temos $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Mas, por hipótese temos $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

$$\text{Logo, } \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}, \text{ donde } \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{C_1B}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B} + \frac{C_2B}{C_2B}.$$

$$\text{Isto implica que } \frac{AB}{C_1B} = \frac{AB}{C_2B}$$

Simplificando obtemos $C_1B = C_2B$ e como C_1 e C_2 pertencem ao segmento $[AB]$ obtemos $C_1 = C_2$.

Logo $P \in [CC_1]$.

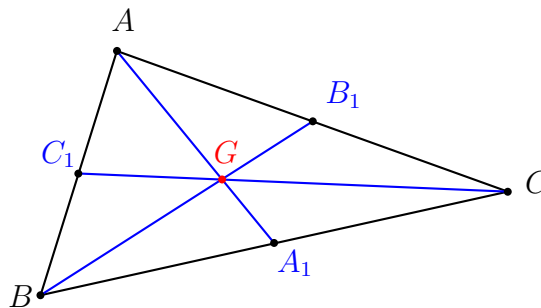
□

3.2 Pontos notáveis de um triângulo

Nesta secção vamos usar o Teorema de Ceva para provar a existência de alguns pontos notáveis do triângulo como o Baricentro, Circuncentro, Ortocentro, Incentro e Ponto de Gergonne.

Teorema 3.2.1. *As três medianas de um triângulo incidem num ponto interior ao triângulo.*

Definição 3.2.2. *O ponto de interseção das medianas é chamado de baricentro ou centro de gravidade do triângulo e denotado por G .*



Demonstração. Teorema 3.2.1

Como a mediana é a reta que liga um vértice e o ponto médio do lado oposto do triângulo, temos

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

onde A_1 , B_1 , C_1 designam os pontos médios dos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$.

Obtemos então

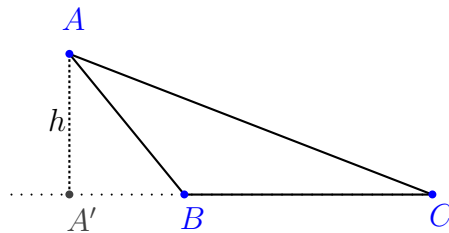
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as medianas interseitam-se num ponto.

Note-se que o ponto de interseção das medianas é interior ao triângulo, pois os segmentos $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ são cevianas

□

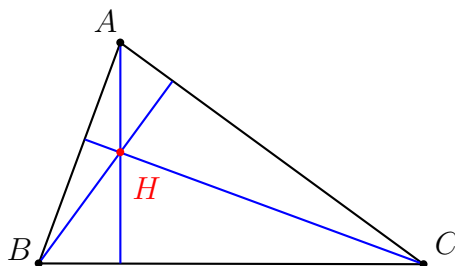
As alturas de um triângulo não são sempre cevianas, como se observa na figura seguinte.



É fácil de verificar que desde que se trata de um triângulo acutângulo, triângulo em que todos os seus ângulos são agudos, as alturas são cevianas. Por conseguinte, vamos aqui restringir-nos ao caso em que os ângulos do triângulo são todos agudos o que vai garantir que o ponto de concorrência das alturas seja um ponto interior ao triângulo.

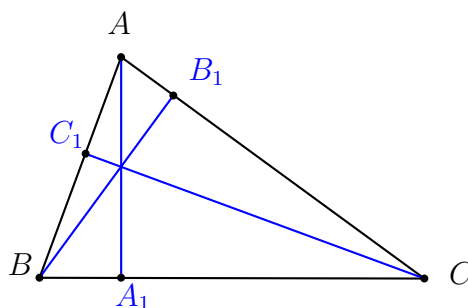
Teorema 3.2.3. *Num triângulo $\triangle ABC$, em que todos os ângulos são agudos, as alturas incidem num ponto interior ao triângulo.*

Definição 3.2.4. O ponto de interseção das alturas de um triângulo é chamado de ortocentro e denotado por H .



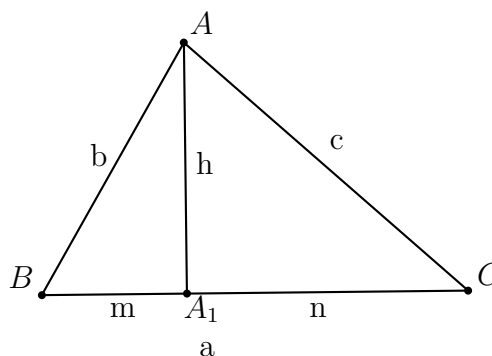
Demonstração. Teorema 3.2.3

Seja ABC um triângulo e sejam A_1 , B_1 e C_1 os pés das alturas passando pelos vértices A , B e C , respectivamente.



Tendo suposto que todos os ângulos do triângulo são agudos temos que as três alturas são cevianas.

Consideremos $AA_1=h$; $BA_1=m$; $CA_1=n$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle AA_1B$ e $\triangle AA_1C$ obtemos respectivamente:

$$b^2 = h^2 + m^2, \quad c^2 = h^2 + n^2$$

Como $A_1 \in [BC]$, temos que $a = m + n$, donde podemos deduzir que $m^2 = n^2 + a^2 - 2an$ e $n^2 = m^2 + a^2 - 2am$

Substituindo na 1ª equação ($b^2 = h^2 + m^2$), obtemos:

$$b^2 = h^2 + n^2 + a^2 - 2an \Leftrightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2an \Leftrightarrow n = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Substituindo na 2ª equação ($c^2 = h^2 + n^2$), obtemos:

$$c^2 = h^2 + m^2 + a^2 - 2am \Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2am \Leftrightarrow m = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

Como $CA_1 = m$ temos $CA_1 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$ e como $A_1B = n$ temos $A_1B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

Logo, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{n}{m}$ e obtemos $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$

Analogamente obtemos,

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2} \quad \text{e} \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c^2 + a^2 - b^2}$$

Multiplicando as três razões obtemos:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = 1$$

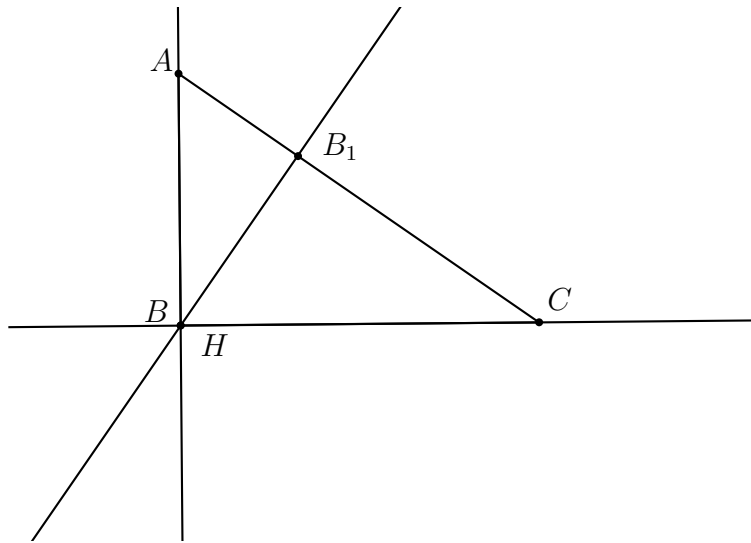
Logo, pelo Teorema de Ceva, as alturas interseitam-se num ponto.

□

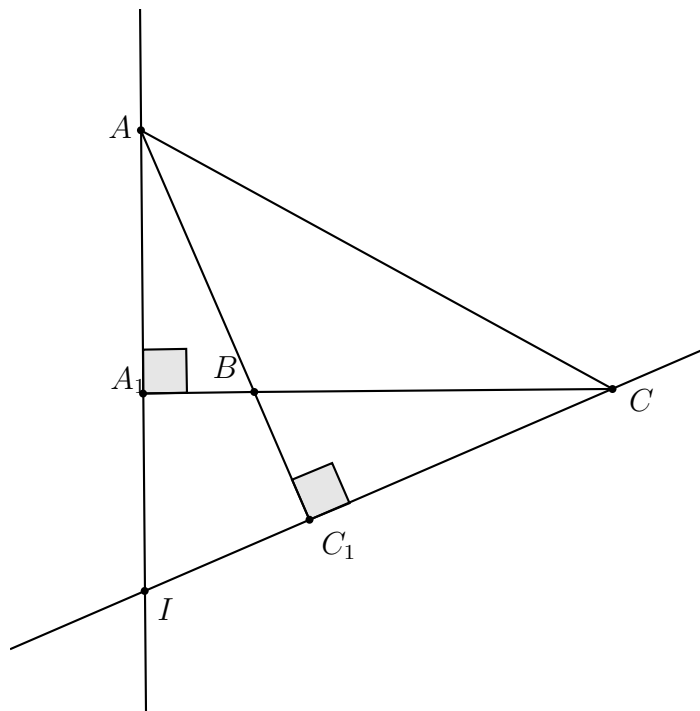
Como é bem conhecido, quando o triângulo não é acutângulo, as alturas também concorrem num ponto. De seguida indicamos como o teorema de ceva pode ser usado nesses casos.

Supondo que um dos ângulos (digamos \widehat{B}) não é agudo, temos os seguintes casos:

1. Se \widehat{B} for reto, duas das alturas coincidem com os lados do triângulo e assim as 3 alturas interseitam-se no vértice do ângulo reto, neste caso, vértice B. Logo, o ponto de interseção das alturas é um vértice do triângulo.



2. Se \widehat{B} for obtuso então $[AA_1]$ e $[CC_1]$ não são cevianas (pois se fossem teríamos triângulos com 2 ângulos com amplitude igual ou superior a 90°) e intersectam-se num ponto I tal que $A_1 \in [AI]$ e $C_1 \in [CI]$.



Assim, no triângulo $\triangle ACI$, $[AC_1]$ e $[CA_1]$ são cevianas e alturas e o seu ponto de interseção B está no interior do $\triangle ACI$. Logo, o ângulo em I é agudo.

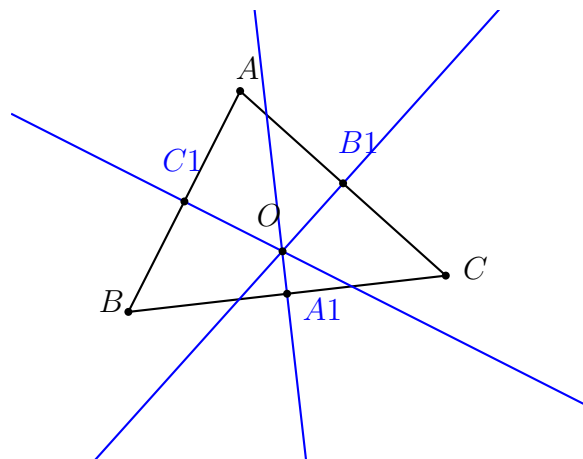
Como os três ângulos no $\triangle ACI$ são agudos podemos aplicar o teorema do ortocentro para ângulos agudos e concluir que (IB) é uma altura no triângulo $\triangle ACI$.

Logo, (IB) é perpendicular a (AC) e (IB) é igualmente altura no triângulo $\triangle ABC$. Finalmente, as três alturas do triângulo $\triangle ABC$ intersectam-se em I .

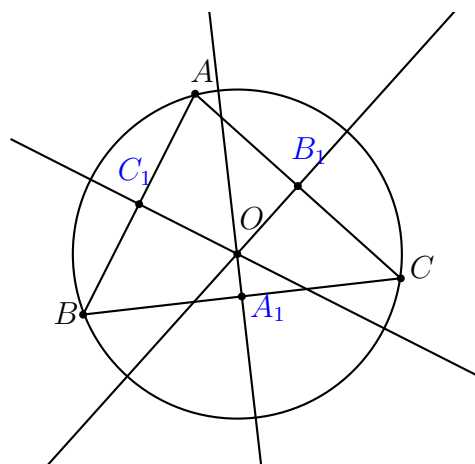
Para garantir que o ponto de interseção das mediatrizes seja interior ao triângulo, vai ser novamente considerado um triângulo com todos os ângulos agudo.

Teorema 3.2.5. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que todos os ângulos são agudos. As três mediatrizes dos lados do triângulo incidem num ponto interior do triângulo.*

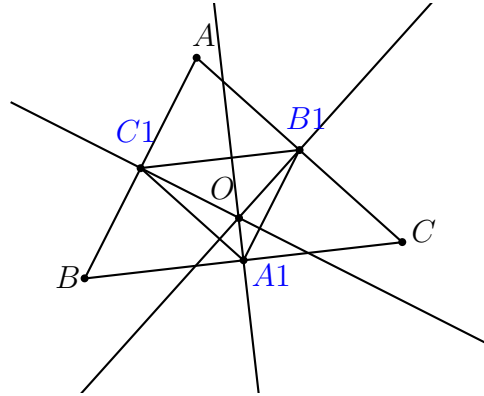
Definição 3.2.6. *O ponto de interseção das mediatrizes de um triângulo é chamado de circuncentro e é denotado por O .*



A circunferência de centro O e raio $[OA]$ também incide nos pontos B e C e diz-se circunferência circunscrita ao triângulo ou também, que o triângulo está inscrito na circunferência.



Demonstração. Teorema 3.2.5



Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pontos médios dos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$ respectivamente.

A reta (A_1B_1) é paralela à reta (AB) (Teorema de Tales). Logo, a mediatriz de $[AB]$ é perpendicular a (A_1B_1) e como passa por C_1 é uma altura do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$.

Raciocinando de forma análoga para os outros dois lados temos que, as mediatrizes do triângulo $\triangle ABC$ são as alturas do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$.

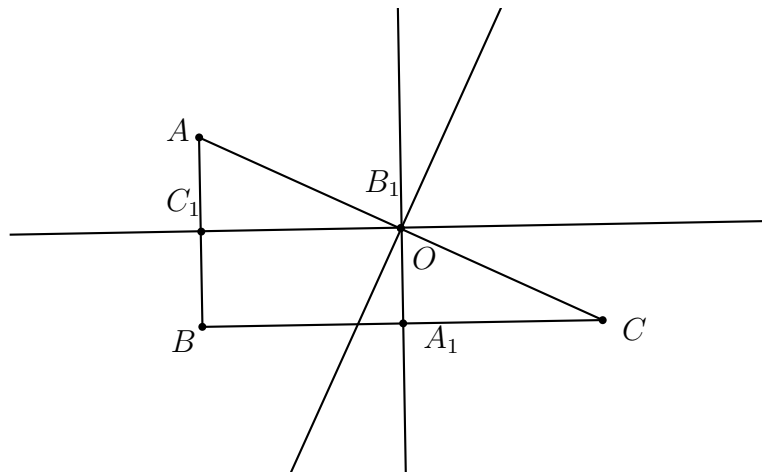
Pelo teorema do ortocentro, as alturas de um triângulo interseam-se num ponto.

Logo, as mediatrizes do triângulo interseam-se num ponto.

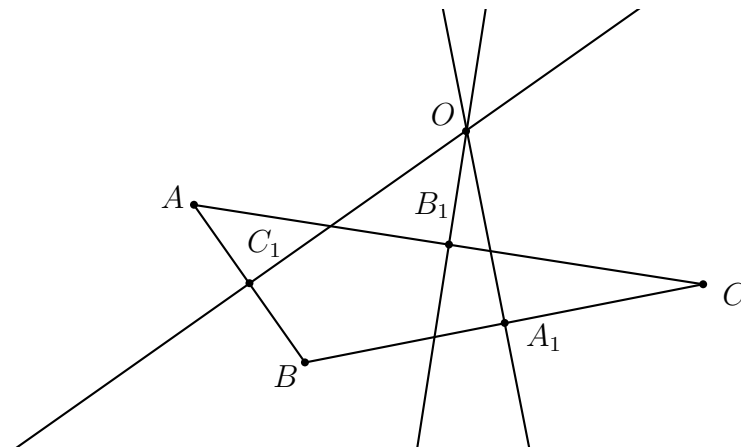
□

Novamente vamos analisar aqui o que acontece no caso em que um dos ângulos (digamos \widehat{B}) não é agudo.

1. Se \widehat{B} for reto, as mediatrizes interseam-se no lado oposto ao ângulo reto, neste caso, lado $[AC]$, uma vez que as mediatrizes correspondentes aos lados do ângulo reto são paralelas aos lados do triângulo.



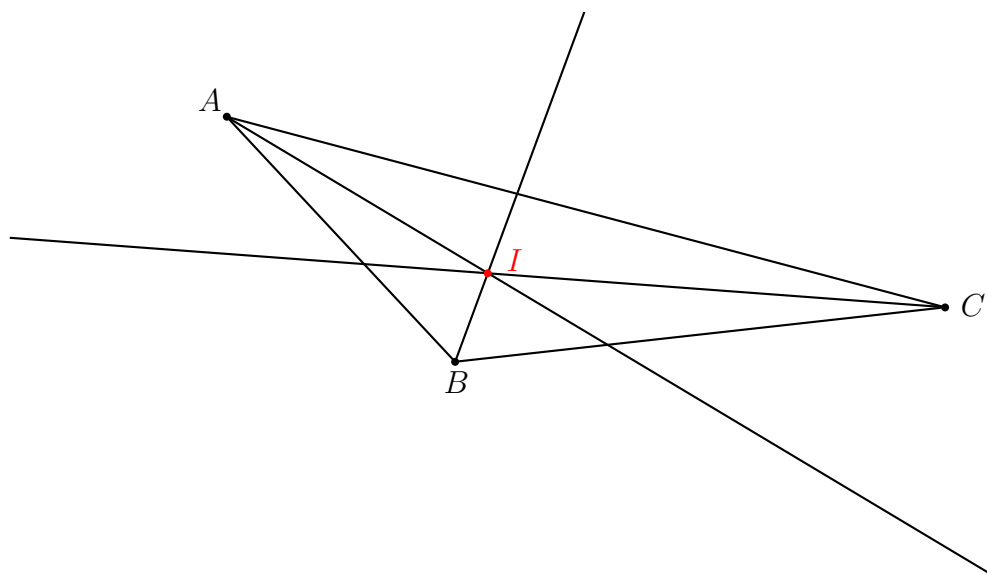
2. Se \widehat{B} for obtuso, então as três mediatrizes intersectam-se no exterior do triângulo.



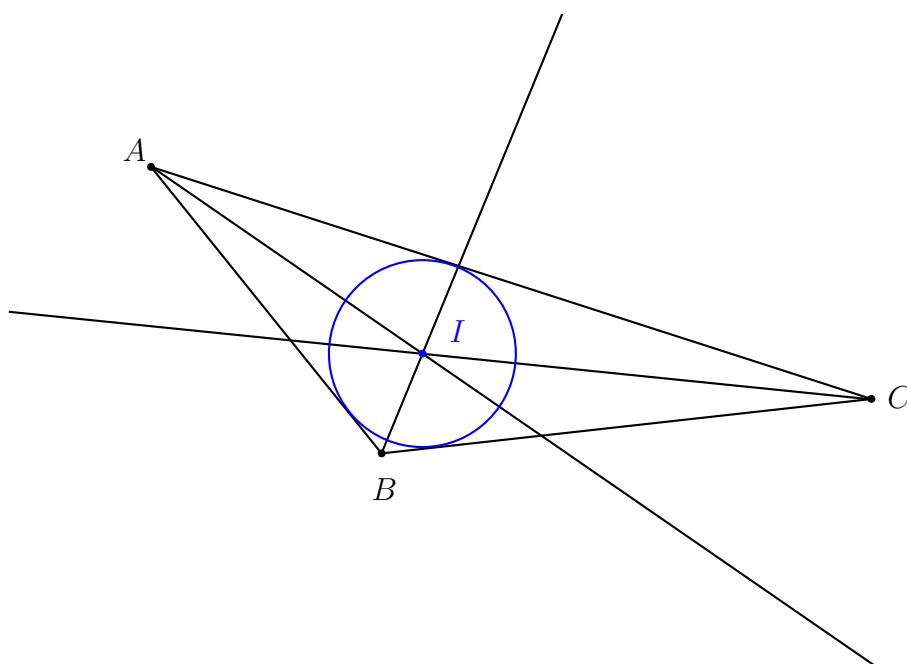
Note-se que a demonstração usada para o caso de os ângulos serem todos agudos serve também para estes casos.

Teorema 3.2.7. *Num triângulo $\triangle ABC$, as bissetrizes interiores correspondentes aos ângulos internos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ incidem num ponto interior ao triângulo.*

Definição 3.2.8. *O ponto de incidência das três bissetrizes interiores do triângulo é chamado de incentro e denotado por I .*

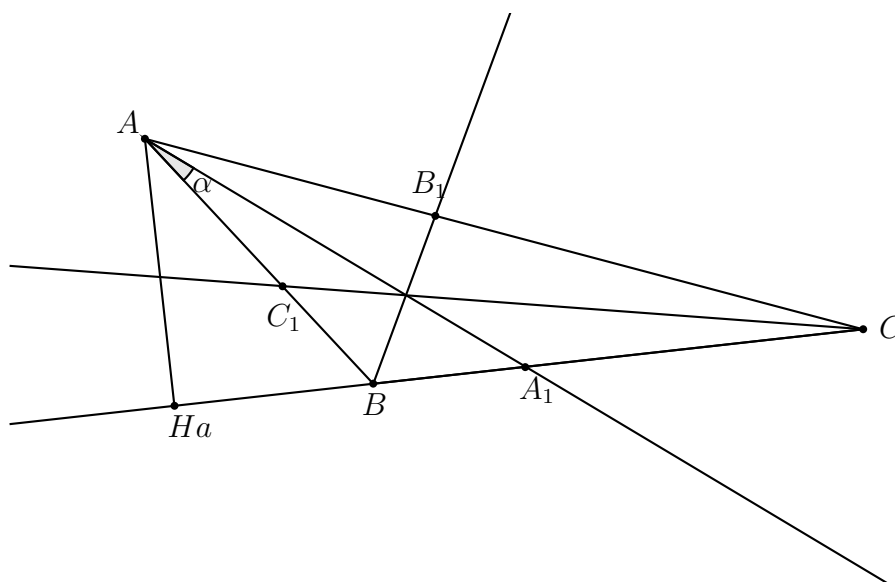


O incentro de um $\triangle ABC$ é o centro da circunferência inscrita do triângulo.



Demonstração. Teorema 3.2.7

Seja A_1 o ponto de interseção da bissetriz relativa ao vértice A com o segmento $[BC]$.



Consideremos as áreas dos triângulos $\triangle ABA_1$ e $\triangle ACA_1$.

Seja α a amplitude do ângulo $\angle BAA_1$. Então, temos:

$$\frac{(ABA_1)}{(ACA_1)} = \frac{AB \cdot AA_1 \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{2}}{AC \cdot AA_1 \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{2}} = \frac{AB}{AC}$$

Seja agora $[AH_a]$ a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao vértice A.

$$\frac{(ABC)}{(ACA_1)} = \frac{\frac{BA_1 \cdot AH_a}{2}}{\frac{A_1C \cdot AH_a}{2}} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

Obtemos então que:

$$\frac{(ABC)}{(ACA_1)} = \frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

isto é, $\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$.

De modo análogo, designando por B_1 e C_1 os pontos de interseção das bissetrizes $\dot{B}B_1$ e $\dot{C}C_1$ com os lados $[AC]$ e $[BC]$, obtemos $\frac{BA}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$ e $\frac{CA}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B}$

Então, como

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{CB}{CA} = 1$$

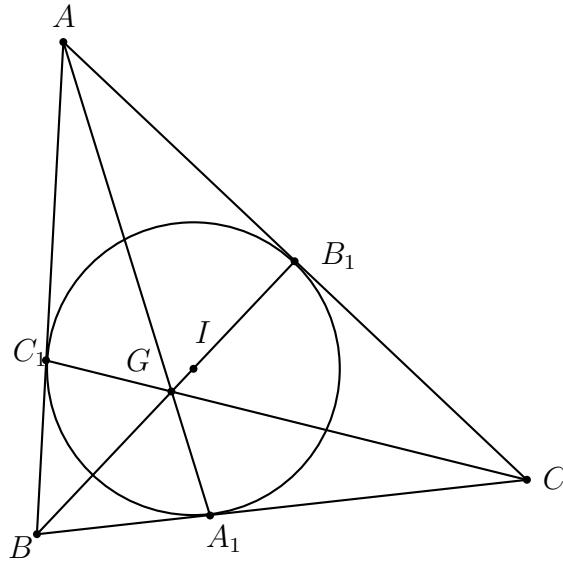
temos, pelo Teorema de Ceva que as bissetrizes se intersectam num ponto.

□

Teorema 3.2.9 (Ponto de Gergonne). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja I o seu incentro. Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo.*

Os segmentos de reta $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ intersectam-se num ponto.

Definição 3.2.10. *Com as notações do teorema anterior, o ponto de interseção dos segmentos de reta $[AA_1]$, $[BB_1]$ e $[CC_1]$ é chamado de Ponto de Gergonne.*



Demonstração. Teorema 3.2.9

Queremos provar que as três cevianas se intersectam num ponto. Pelo Teorema de Ceva, basta ver que

$$\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$$

Sendo I o incentro do triângulo e o centro da circunferência inscrita, temos que $[IA_1]$, $[IB_1]$ e $[IC_1]$ são raios da circunferência.

Consideremos os triângulos $\triangle A_1IB$ e $\triangle BIC_1$.

Os triângulos são semelhantes pois $\angle IBC_1 \equiv \angle IBA_1$ e $\angle BC_1I \equiv \angle BA_1I$.

Como $[IB]$ é comum aos dois triângulos, então os triângulos são congruentes.

Donde, $BC_1 = BA_1$.

De forma análoga se prova que $CA_1 = CB_1$ e $AB_1 = AC_1$.

Substituindo na equação inicial, obtemos

$$\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{BC_1}{AB_1} \cdot \frac{AB_1}{CA_1} \cdot \frac{CA_1}{BC_1} = 1$$

□

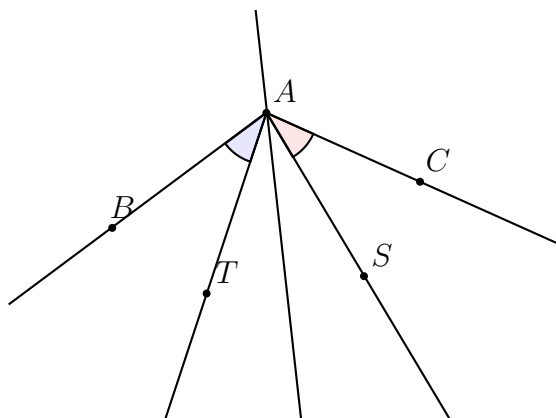
Capítulo 4

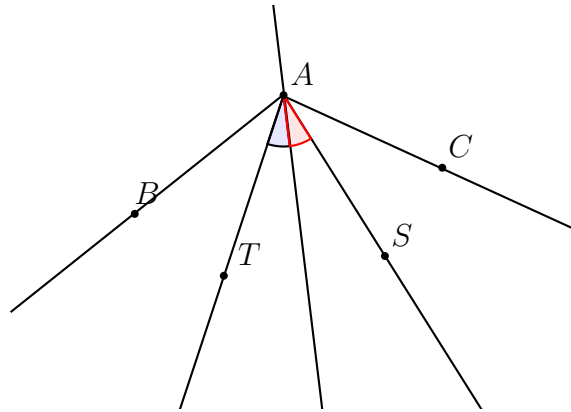
Conjugados Isogonais

Neste capítulo vamos definir a noção de conjugação isogonal e ver os primeiros resultados deste conceito para o incentro, ortocentro e circuncentro.

4.1 Conjugação Isogonal

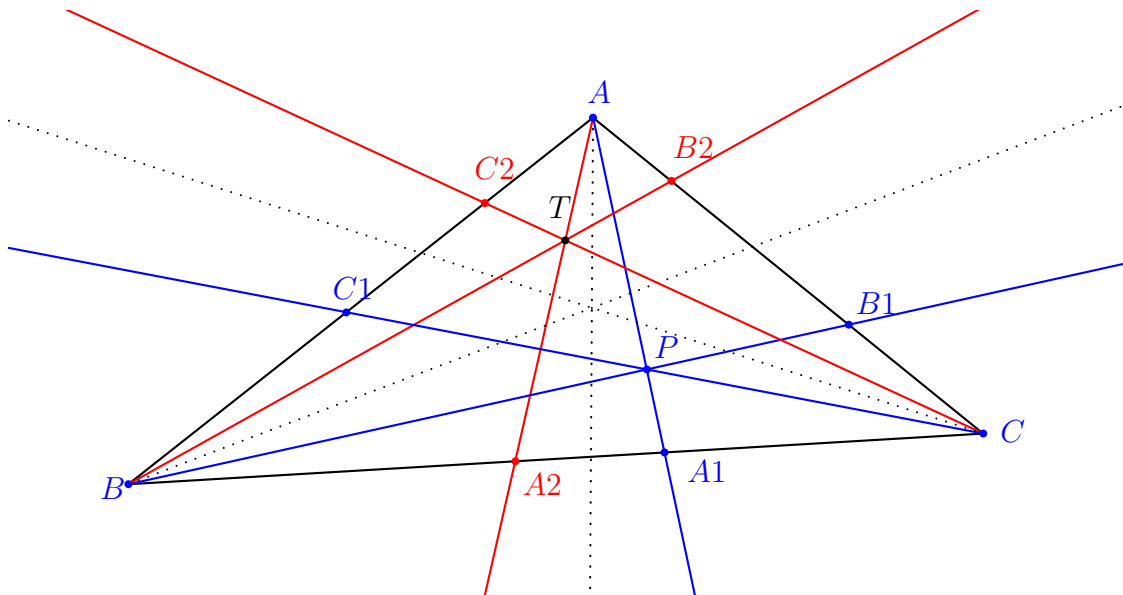
Definição 4.1.1 (Conjugada Isogonal de uma semirreta). *Duas semirretas \dot{AS} e \dot{AT} , coincidentes no vértice A de um ângulo $\angle BAC$, dizem-se conjugadas isogonais se $\angle BAT \equiv \angle CAS$, ou equivalentemente, se o ângulo formado pela semirreta \dot{AT} e pela bissetriz do ângulo $\angle A$ é igual ao ângulo formado pela semireta \dot{AS} e pela bissetriz do ângulo $\angle A$.*





Teorema 4.1.2 (Teorema Fundamental dos Conjugados Isogonais). *Dados um triângulo e três semirretas que passam pelos respectivos vértices e concorrem em um ponto P interior ao triângulo, as semirretas isogonais a elas, obtidas através da reflexão em relação à bissetriz interna correspondente, são concorrentes num ponto.*

Este ponto, na figura denotado pela letra T, é chamado **conjugado isogonal** de P.



Note-se que o conjugado do conjugado de um ponto é o próprio ponto.

Demonstração. Sejam $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$ e $C_1 \in [AB]$ tais que as semirretas $\dot{A}A_1$, $\dot{B}B_1$ e $\dot{C}C_1$ incidem num ponto P interior ao triângulo $\triangle ABC$.

Aplicando o Teorema de Ceva às cevianas concorrentes no ponto P, obtemos:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

Consideremos agora as semirretas isogonais a $\dot{A}A_1$, $\dot{B}B_1$ e $\dot{C}C_1$ obtidas através da reflexão em relação à bissetriz interna correspondente. Sejam $\dot{A}A_2$, $\dot{B}B_2$ e $\dot{C}C_2$ essas semirretas onde A_2 , B_2 e C_2 são pontos dos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$.

Pela lei dos senos no triângulo $\triangle ABA_1$ tem-se:

$$\frac{\text{sen}(A_1\hat{A}B)}{A_1B} = \frac{\text{sen}(A\hat{A}_1B)}{AB}$$

Pela lei dos senos no triângulo $\triangle ACA_1$ tem-se

$$\frac{\text{sen}(A_1\hat{A}C)}{A_1C} = \frac{\text{sen}(A\hat{A}_1C)}{AC}$$

Como os ângulos $\angle AA_1B$ e $\angle AA_1C$ são suplementares, eles têm o mesmo seno e, a partir das duas igualdades anteriores, obtemos:

$$\frac{\text{sen}(A_1\hat{A}C)}{\text{sen}(A_1\hat{A}B)} = \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{AB}{AC}$$

Analogamente, aplicando o mesmo processo aos triângulos $\triangle ABA_2$ e $\triangle ACA_2$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}(A_2\hat{A}B)}{\text{sen}(A_2\hat{A}C)} = \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{AC}{AB}$$

Como as semirretas $\dot{A}A_1$ e $\dot{A}A_2$ são isogonais, temos por congruência de ângulos,

$$\text{sen}(A_1\hat{A}C) = \text{sen}(A_2\hat{A}B) \text{ e } \text{sen}(A_1\hat{A}B) = \text{sen}(A_2\hat{A}C)$$

Assim obtemos, $\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{AC}{AB}$, donde se obtém $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AC}{AB}$

Da mesma forma obtemos:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AB}{CB} \cdot \frac{AB}{CB} \quad \text{e} \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BC_2}{C_2A} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AC}{CB}$$

Logo, substituindo na equação $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{AB}{CB} \cdot \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CB_2}{B_2A}\right) \cdot \left(\frac{AC}{AB} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BA_2}{A_2C}\right) \cdot \left(\frac{CB}{AC} \cdot \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AC_2}{C_2B}\right) = 1, \text{ ou seja, } \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1$$

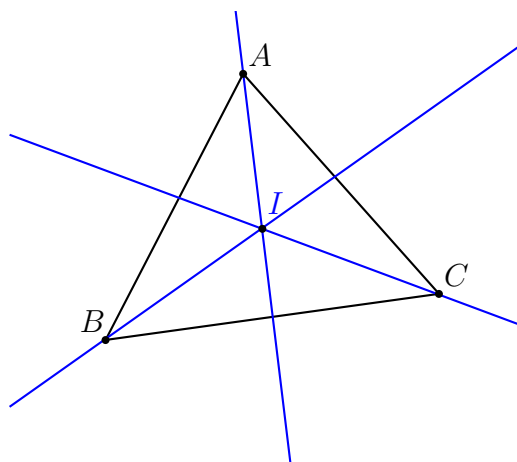
Donde, pelo Teorema de Ceva, as semirretas $\dot{A}A_2$, $\dot{B}B_2$ e $\dot{C}C_2$ são concorrentes em um ponto. \square

Teorema 4.1.3. *O conjugado isogonal do incentro é o próprio incentro.*

Demonstração. Os conjugados isogonais das bissetrizes coincidem com as próprias bissetrizes.

Logo, o conjugado isogonal do incentro, que é a interseção das bissetrizes internas de um triângulo, é o próprio incentro.

□

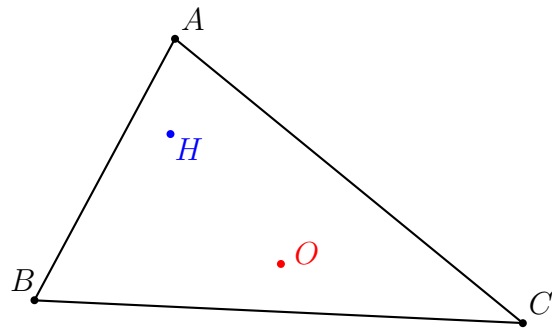


4.2 Ortocentro e Circuncentro - Construção no Geogebra

Nesta secção vamos apresentar o conjugado isogonal do ortocentro/ circuncentro e verificar o resultado através da utilização do programa Geogebra de Geometria Dinâmica. No final faremos uma demonstração analítica de maneira a completar a “prova” feita no Geogebra.

Vamos também considerar um triângulo em que os ângulos são todos agudos de forma a que o ortocentro e circuncentro sejam pontos interiores.

Teorema 4.2.1. *O conjugado isogonal do ortocentro, que é a interseção das alturas de um triângulo, é o circuncentro, que é a interseção das mediatrizes de um triângulo e o conjugado isogonal do circuncentro é o ortocentro.*



Construção no Geogebra

Elementos iniciais: Construir um triângulo $\triangle ABC$

Nota: O nome e as características gráficas de um objeto podem ser alteradas através da opção *Propriedades* disponível no menu obtido pelo botão direito quando o rato aponta para o objeto considerado.

Construção:

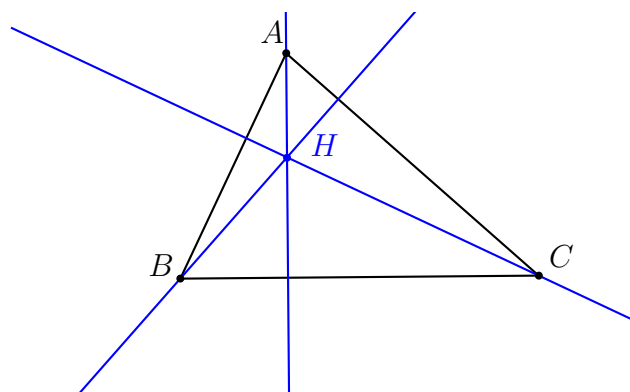
1. Traça-se a altura relativa ao vértice A.

Traça-se a altura relativa ao vértice B.

2. Obtem-se o ponto de interseção das duas alturas usando a tecla *Interseção de dois objetos*.

Com a opção *Propriedades* mudar o nome para H.

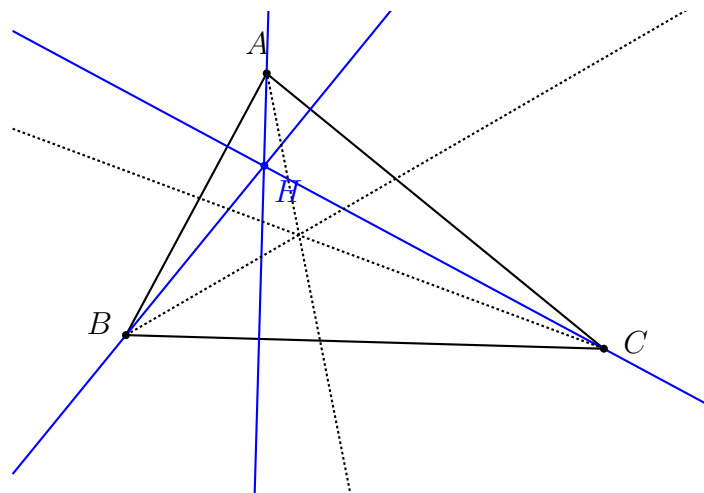
3. Traça-se a altura relativa ao vértice C e verifica-se que esta intersesta o ponto H.



4. Traçar a bissetriz relativa ao vértice A.

Traçar a bissetriz relativa ao vértice B.

Traçar a bissetriz relativa ao vértice C.



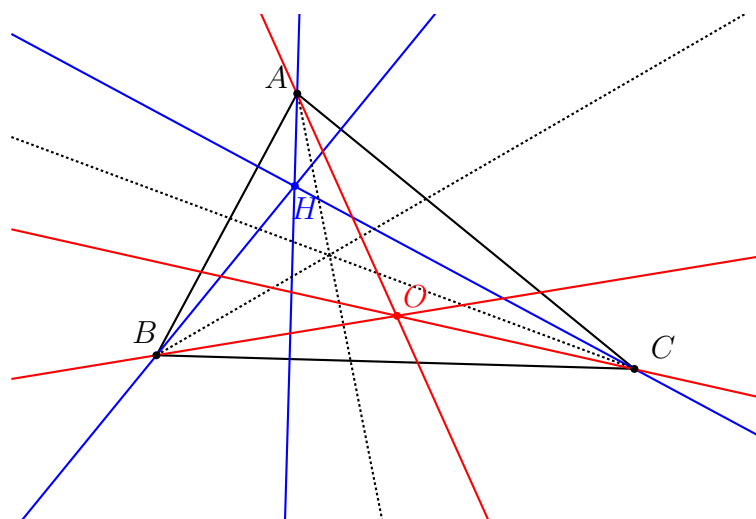
5. Traçar o conjugado isogonal da altura relativa ao vértice A usando a tecla *Reflexão em relação a uma reta*.

Traçar o conjugado isogonal da altura relativa ao vértice B.

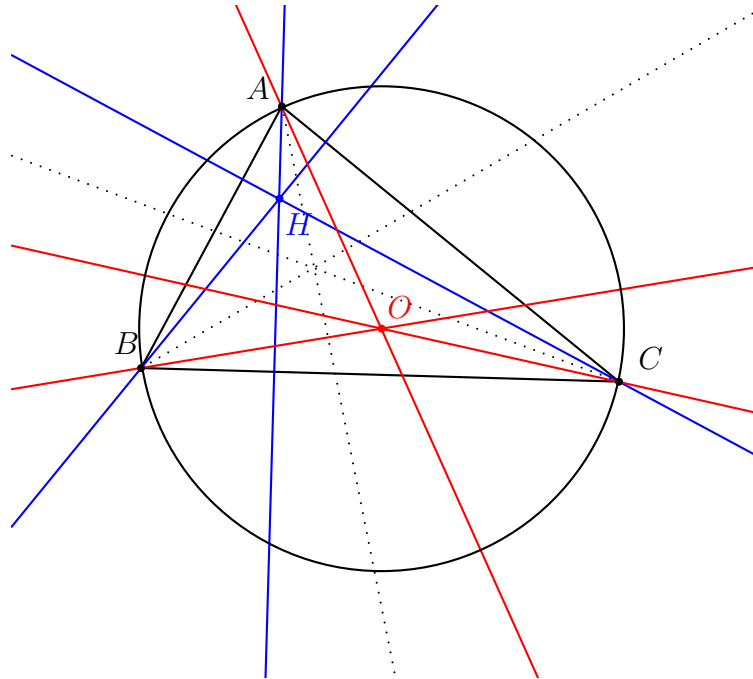
6. Obtem-se o ponto de interseção dos conjugados isogonais das alturas usando a tecla *Interseção de dois objetos*.

Com a opção *Propriedades* mudar o nome para O.

7. Traçar o conjugado isogonal da altura relativa ao vértice C e verifica-se que esta intersesta o ponto O.



8. Traçar a circunferência de centro O e que passa por A usando a tecla *Circunferência dados o centro e um ponto*.

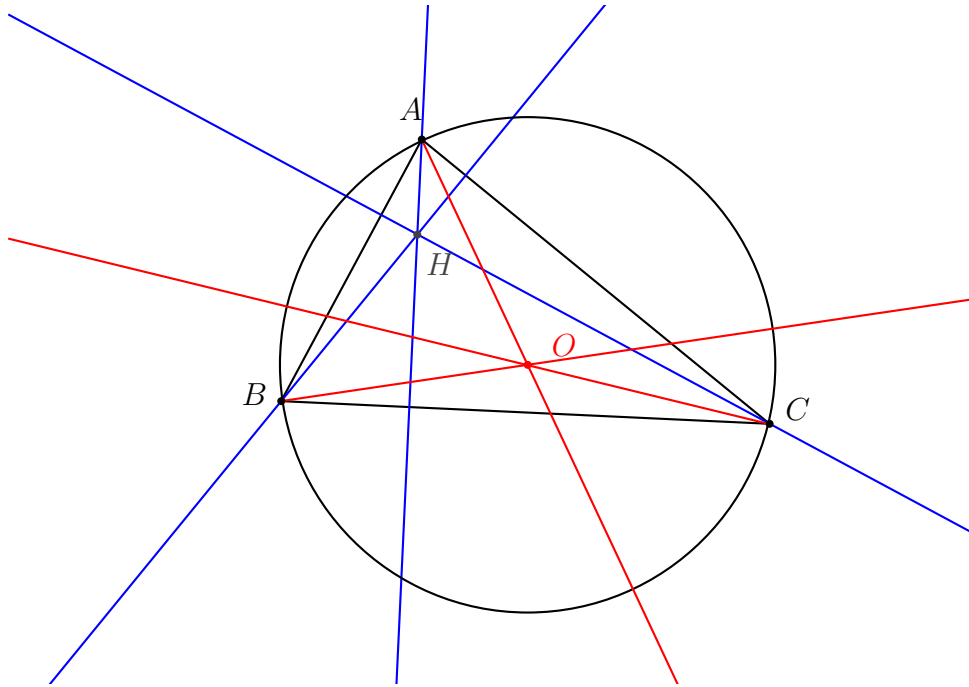


Verifica-se que a circunferência traçada é a circunferência circunscrita ao triângulo, o que permite “concluir” que O é o circuncentro do triângulo.

Nota:

- Usando a tecla *Mover* e selecionando um dos vértices do $\triangle ABC$ pode-se observar que a construção se modifica adequadamente.
- A ferramenta específica do Geogebra para a construção da altura de um triângulo, isto é, a perpendicular a um lado passando pelo vértice oposto é *Perpendicular*.
- A ferramenta específica do Geogebra para a construção da bissetriz de um ângulo é *Bissetriz*.
- A ferramenta específica do Geogebra para a construção do conjugado isogonal de uma reta é *Reflexão em relação a uma reta*.
- Para facilitar o processo de construção de conjugados isogonais, construiu-se uma ferramenta para a obtenção de um conjugado isogonal de um ponto.

Demonstração. Teorema 4.2.1



Seja O o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$. Então, temos que o ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ donde temos que o triângulo $\triangle OBC$ é isósceles ($[OB] \equiv [OC]$ pois são raios da circunferência), donde obtemos que $\angle OBC \equiv \angle OCB$.

Como A é um ponto do arco maior definido por B e C , pois $\angle A$ é agudo, temos $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$, donde obtemos que $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.

Por outro lado, sendo H o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, o ângulo formado pelas retas (AC) e (BH) é reto, pois (BH) é a altura de vértice B do $\triangle ABC$. Seja H_B o pé desta altura.

Consideremos o $\triangle ABH_B$. Temos que $\widehat{ABH_B} = 180^\circ - \widehat{BH_BA} - \widehat{BAC}$ donde obtemos, $\widehat{ABH_B} = 90^\circ - \widehat{BAC}$. Logo, obtemos que $\widehat{ABH} = \widehat{OBC}$.

Por definição de semirretas isogonais temos que a semirreta \dot{BH} é isogonal à semirreta \dot{BO} , relativamente ao ângulo $\angle ABC$.

De forma análoga, as semirretas \dot{AH} e \dot{CH} são isogonais às semirretas \dot{AO} e \dot{CO} , respetivamente. Como o ponto H é o ponto de interseção das retas (AH) , (BH) e (CH) (alturas do triângulo), o ponto H é o conjugado isogonal do ponto O no triângulo $\triangle ABC$.

□

Obs: Esta demonstração foi baseada no trabalho de *Darig Grinberg* (ver [4]).

Capítulo 5

Ponto de Lemoine e Pontos de Brocard

Neste capítulo, vamos considerar um triângulo $\triangle ABC$ em que a é o comprimento do lado $[BC]$, b é o comprimento do lado $[AC]$ e c é comprimento do lado $[AB]$.

Vamos estabelecer algumas propriedades do conjugado isogonal do baricentro, chamado Ponto de Lemoine, e estudar a configuração especial dos chamados pontos de Brocard.

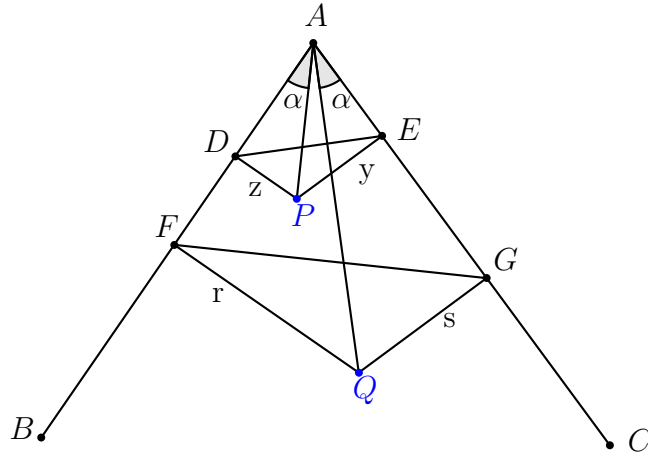
Começemos com alguns resultados gerais sobre as distâncias aos lados de um triângulo, de um ponto e seu conjugado.

5.1 Conjugação e distância aos lados do triângulo

Teorema 5.1.1. *Sejam P e Q dois pontos no interior de um ângulo $\angle BAC$ e sejam z , y as distâncias de P aos lados $[AB]$ e $[AC]$ do ângulo e r , s as distâncias de Q a esses mesmos lados.*

Os pontos P e Q incidem em duas semirretas isogonais, relativamente ao ângulo A , se e só se as distâncias do ponto P aos lados do ângulo A são inversamente proporcionais às distâncias correspondentes do ponto Q , isto é,

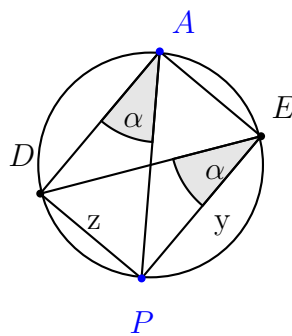
$$\frac{z}{y} = \frac{s}{r},$$



Demonstração. Consideremos a notação da figura. Sejam P e Q dois pontos incidentes em duas semirretas de origem em A e no interior do ângulo $\angle BAC$.

Suponhamos que $\frac{z}{y} = \frac{s}{r}$.

Como $\widehat{ADP} = \widehat{AEP} = 90^\circ$, temos que o quadrilátero ADPE é um quadrilátero cíclico, isto é, está inscrito numa circunferência.



Temos que o ângulo $\widehat{DAP} = \widehat{DEP} = \alpha$ (ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência) e $\widehat{DPE} = 180^\circ - \widehat{DAE}$.

De igual forma, temos que o quadrilátero AFQG é um quadrilátero cíclico ($\widehat{AFQ} = \widehat{AGQ} = 90^\circ$) e $\widehat{GFQ} = \widehat{QAG} = \beta$ e $\widehat{FQG} = 180^\circ - \widehat{DAE}$.

Por outro lado, como $\frac{z}{y} = \frac{s}{r}$ e $\angle DPE \equiv \angle GQF$, pelo critério LAL de semelhança de triângulos os triângulos $\triangle DPE$ e $\triangle GQF$ são semelhantes.

Donde, $\angle DEP \equiv \angle GFQ$, isto é, $\alpha = \beta$, logo

$$\angle DAP \equiv \angle EAQ$$

O que prova que $\dot{A}P$ e $\dot{A}Q$ são semirretas isogonais.

Suponhamos agora que as semirretas $\dot{A}P$ e $\dot{A}Q$ são isogonais.

Temos então que $\alpha = \beta$, donde se conclui que $\angle DEP \equiv \angle GFQ$ e $\angle DPE \equiv \angle GQF$.

Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle DEP$ e $\triangle GFQ$ são semelhantes.

Como os triângulos são semelhantes temos que os lados correspondentes do triângulo são proporcionais, isto é,

$$\frac{z}{y} = \frac{r}{s}$$

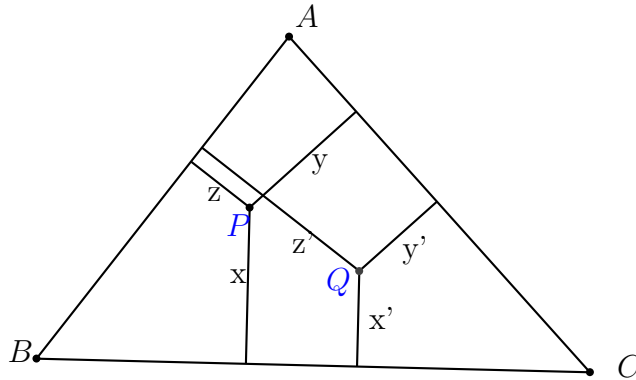
□

Deste primeiro resultado deduzimos imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2. *Seja P um ponto do interior do triângulo e Q o seu conjugado isogonal.*

Sejam x, y, z e respetivamente x', y', z' , as distâncias de P respetivamente Q aos lados do triângulo. Temos que

$$xx' = yy' = zz'$$



Demonstração. Pelo teorema 5.1.1, temos:

$$\frac{x}{z} = \frac{z'}{x'} \text{ e } \frac{z}{y} = \frac{y'}{z'}, \text{ donde obtemos, } xx' = yy' = zz'.$$

□

5.2 Ponto de Lemoine

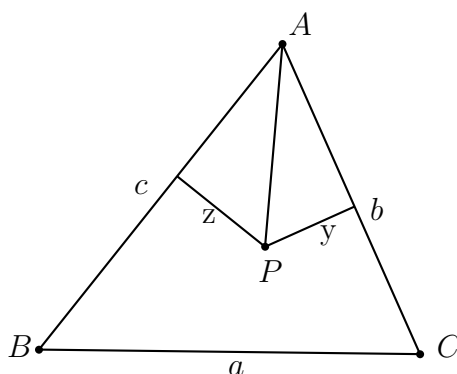
Conjugado do baricentro

Os conjugados isogonais das medianas são chamadas semedianas. O ponto de encontro das semedianas é o *ponto de Lemoine*, também conhecido como *ponto semediano*. O ponto de Lemoine é normalmente denotado por K.

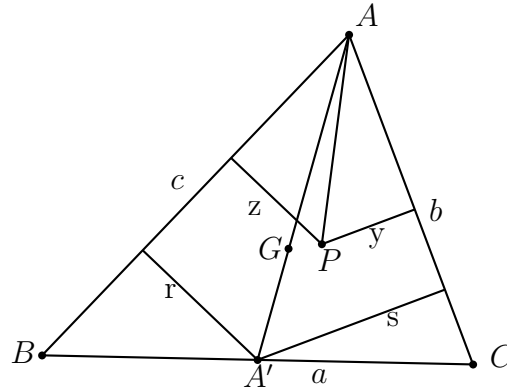
Teorema 5.2.1 (Caraterização de uma semediana). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Seja P um ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$ e sejam z , y as distâncias do ponto P aos lados $[AB]$ e $[AC]$ do triângulo, respetivamente.*

$\dot{A}P$ é uma semediana se e só se as distâncias aos lados $[AB]$ e $[AC]$ são proporcionais aos lados correspondentes, isto é,

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$$



Demonstração.



Seja A' o ponto médio do lado $[BC]$ do triângulo.

Sejam r, s as distâncias do ponto A' aos lados $[AB]$ e $[AC]$ do triângulo, respetivamente.

Suponhamos agora que $\dot{A}P$ é uma semediana.

Então temos que $\dot{A}P$ e $\dot{A}A'$ são semirretas isogonais.

Pelo teorema 5.1.1, temos que $\frac{z}{y} = \frac{s}{r}$.

A mediana $[AA']$ divide o triângulo em dois triângulos com a mesma área, isto é, a área do triângulo $\triangle AA'B$ é igual à área do triângulo $\triangle AA'C$.

Por outro lado, r é a altura do triângulo $\triangle AA'B$ e s é a altura do triângulo $\triangle AA'C$.

Obtemos então que: $\frac{cr}{2} = \frac{bs}{2}$ donde $\frac{c}{b} = \frac{s}{r}$.

Mas como $\frac{z}{y} = \frac{s}{r}$ obtemos

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$$

Suponhamos agora que

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$$

Como $[AA']$ é uma mediana do triângulo $\triangle ABC$, temos que $\frac{s}{r} = \frac{c}{b}$ (visto anteriormente).

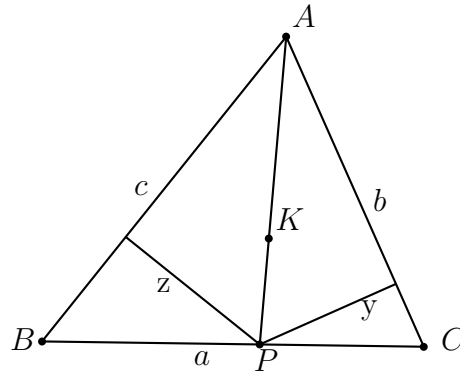
Se $\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$ então também

$$\frac{s}{r} = \frac{z}{y} = \frac{c}{b}$$

Pelo teorema 5.1.1, temos que $\dot{A}A'$ e $\dot{A}P$ são semirretas isogonais, o que implica que $\dot{A}P$ é uma semediana. □

Teorema 5.2.2. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo. A semediana \hat{AP} , onde P é um ponto do lado $[BC]$ do triângulo, divide o lado $[BC]$ em partes proporcionais aos quadrados dos outros 2 lados, isto é,*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{b^2}$$



Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja \hat{AP} a semediana relativa ao vértice A do triângulo, com P no lado $[BC]$. Sejam z, y as distâncias do ponto P aos lados $[AB]$ e $[AC]$ do triângulo, respetivamente.

Temos então que:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{(ABP)}{(APC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot z}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot y} = \frac{c}{b} \cdot \frac{z}{y}$$

Mas pelo Teorema 5.2.1 temos que $\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$, logo,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b}$$

Ou seja,

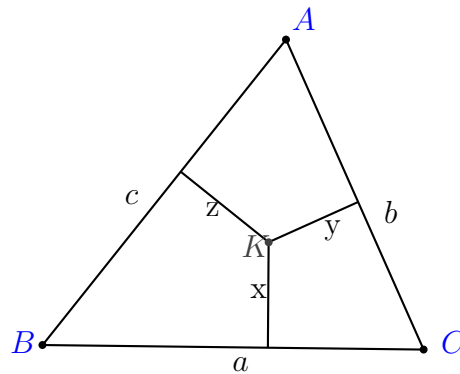
$$\frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{b^2}$$

□

Teorema 5.2.3 (Caraterização do ponto semediano). *Seja K o ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$ e sejam x, y, z as distâncias do ponto K aos lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$ respetivamente.*

Então, K é o ponto semediano do triângulo se e só se estas distâncias são proporcionais aos respectivos lados do triângulo, isto é,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$



Demonstração. Se K é o ponto semediano, pelo Teorema 5.2.1, temos que $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ e $\frac{z}{x} = \frac{c}{a}$.

Logo, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ e $\frac{z}{c} = \frac{x}{a}$, donde,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Suponhamos agora que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

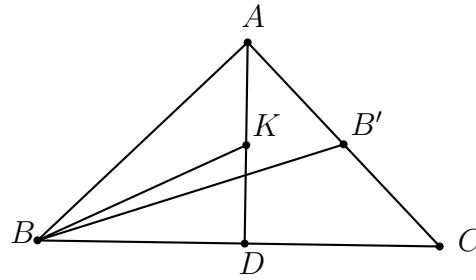
Queremos provar que K é o ponto semediano.

Pelo teorema 5.2.1 temos que $\dot{A}K$ é uma semediana. Da mesma maneira temos que $\dot{B}K$ e $\dot{C}K$ são semedianas, o que nos leva a concluir que K é o ponto semediano.

□

Apresentamos em seguida mais alguns resultados relativos ao ponto semediano

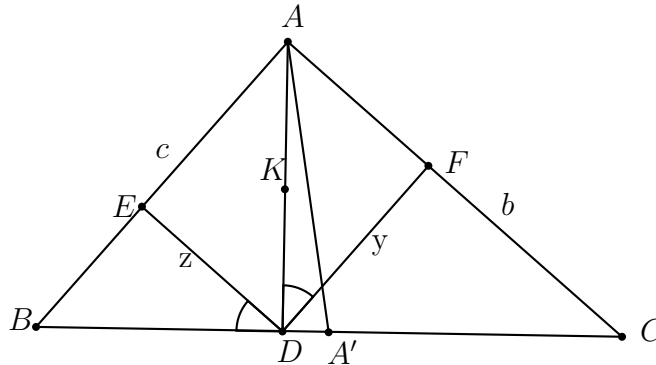
Teorema 5.2.4. *O ponto semediano K , de um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , é o ponto médio da altura $[AD]$ de vértice A e pé D .*



Demonstração. Esta demonstração será feita em dois passos.

1º passo - Provar que AD é a semediana relativa ao vértice A

Queremos ver que $\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$, onde z e y são as distâncias de D aos lados $[AB]$ e $[AC]$.



Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$. Temos que $\angle A \equiv \angle D$ (ângulos retos) e $\angle B \equiv \angle B$, logo pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$ são semelhantes, donde $\angle BAD \equiv \angle ACB$.

Podemos concluir que $\frac{DB}{AB} = \frac{DA}{AC}$ isto é, $\frac{DB}{DA} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.

Consideremos agora os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$. Temos que $\angle A \equiv \angle D$ (ângulos retos) e $\angle C \equiv \angle C$, logo pelo critério de AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$ são semelhantes, donde $\angle DAC \equiv \angle ABC$.

Finalmente, consideremos os triângulos $\triangle BED$ e $\triangle AFD$. Temos que $\angle EBD \equiv \angle DAF$ (pois $\angle ABC \equiv \angle DAC$) e $\angle DEB \equiv \angle DFA$ (ângulos retos), logo pelo critério de

AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle BED$ e $\triangle AFD$ são semelhantes.

Podemos concluir que $\frac{DB}{DE} = \frac{DA}{DF}$ isto é $\frac{DB}{DA} = \frac{DE}{DF} = \frac{z}{y}$.

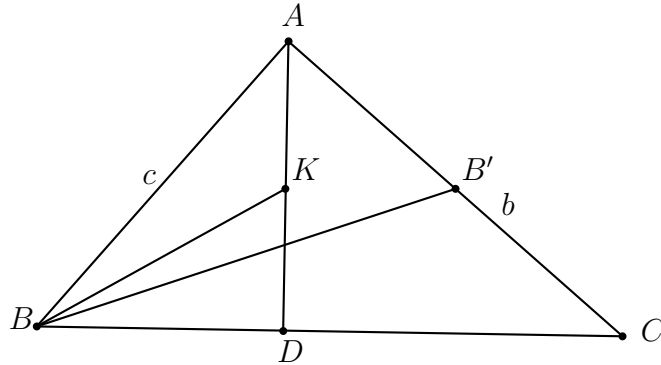
Como $\frac{DB}{DA} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ e $\frac{DB}{DA} = \frac{DE}{DF} = \frac{z}{y}$, temos que

$$\frac{z}{y} = \frac{c}{b}$$

2º passo - Provar que o ponto K é o ponto médio da altura [AD]

Vimos anteriormente que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$ são semelhantes, donde podemos concluir que $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CA}$.

Consideremos agora os triângulos $\triangle ABK$ e $\triangle CBB'$, onde B' é o ponto médio de [AC].



Temos que $\angle BAD \equiv \angle B'CB$ (visto anteriormente) e $\angle ABK \equiv \angle B'BC$ (as semirretas \vec{BK} e $\vec{BB'}$ são isogonais).

Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ABK$ e $\triangle CBB'$ são semelhantes.

Donde se pode concluir que $\frac{AK}{CB'} = \frac{AB}{CB}$.

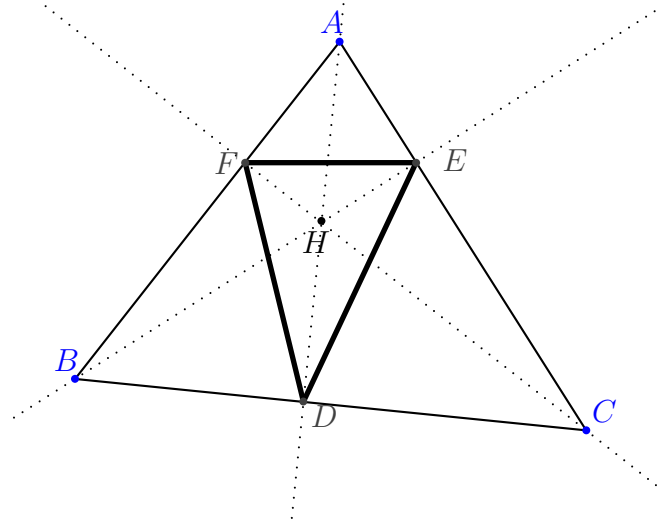
Disso tiramos que $\frac{AD}{CA} = \frac{AK}{CB'}$, ou seja, $\frac{CB'}{CA} = \frac{AK}{AD}$.

Como $\frac{CB'}{CA} = \frac{1}{2}$, obtemos que $\frac{AK}{AD} = \frac{1}{2}$, isto é, o ponto K é o ponto médio do segmento [AD].

□

Definição 5.2.5 (Triângulo órtico). *Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam D , E e F os pés das alturas do triângulo.*

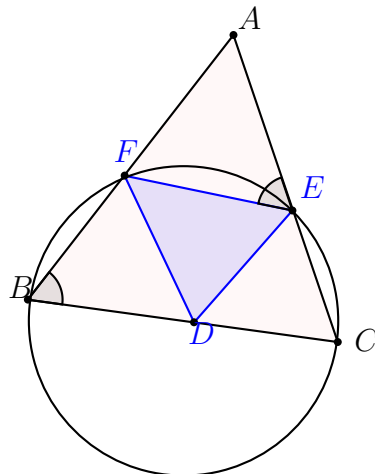
O triângulo $\triangle DEF$ é o triângulo órtico do triângulo dado.



Teorema 5.2.6 (Propriedade triângulo órtico). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo. Seja DEF o triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$. Os triângulos $\triangle AEF$, $\triangle DBF$ e $\triangle DEC$ são semelhantes ao triângulo $\triangle ABC$.*

Demonstração. Consideremos um triângulo $\triangle ABC$ onde D , E e F são os pés das alturas do triângulo.

Consideremos os ângulos $\angle BEC$ e $\angle BFC$. Estes ângulos são retos (pés das alturas), o que nos leva a concluir que os pontos F e E são incidentes numa semicircunferência de diâmetro $[BC]$, o que permite dizer que $\angle FEC$ e $\angle FBC$ são suplementares.



Consideremos os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle ABC$.

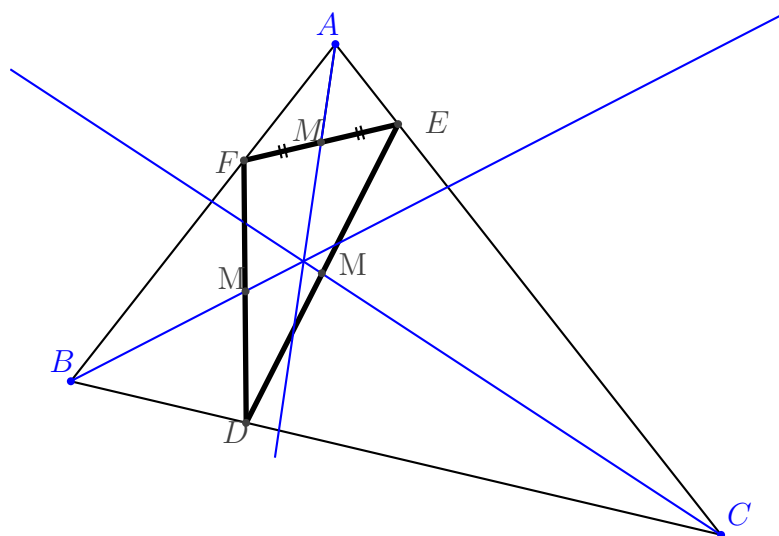
Temos que o ângulo $\angle A$ é comum aos 2 triângulos. Sabemos também que o ângulo $\angle AEF$ é suplementar ao ângulo $\angle FEC$ e por outro lado, o ângulo $\angle FEC$ é suplementar do ângulo $\angle FBC$, donde se conclui que $\angle FBC \equiv \angle AEF$.

Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle ABC$ são semelhantes.

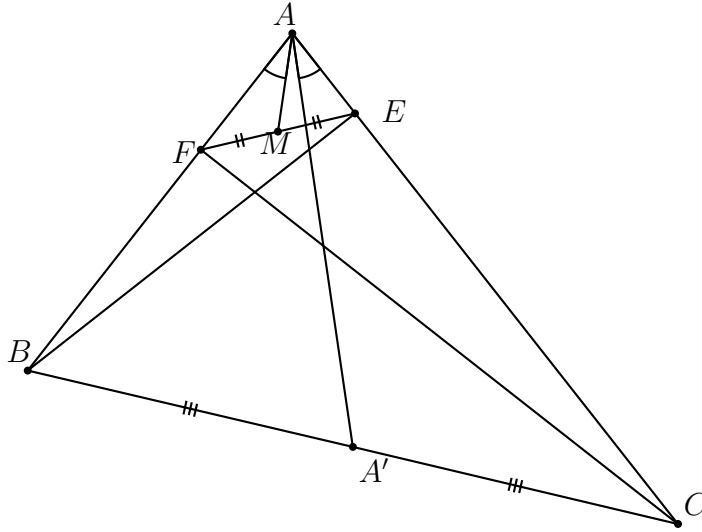
De forma análoga se conclui que os triângulos $\triangle DFB$ e $\triangle DEC$ são semelhantes ao triângulo $\triangle ABC$.

□

Teorema 5.2.7. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo. As semedias do triângulo intersectam os lados do seu triângulo órtico no ponto médio.*



Demonstração.



Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Sejam $[BE]$ e $[CF]$ duas alturas do triângulo e $[EF]$ um lado do triângulo órtico do triângulo. Sejam ainda $[AA']$ a mediana do triângulo relativa ao vértice A e $[AM]$ a sua conjugada isogonal, onde M é um ponto do segmento de reta $[EF]$.

Como $[AA']$ e $[AM]$ são conjugadas isogonais temos que $\angle BAM \equiv \angle EAA'$.

Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AEF$.

Pela propriedade anterior do triângulo órtico, os triângulos são semelhantes, donde, $\angle A \equiv \angle A$, $\angle AEF \equiv \angle B$ e $\angle AFE \equiv \angle C$. Obtemos também que $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$.

Consideremos agora os triângulos $\triangle AFM$ e $\triangle ACA'$. Das igualdades de ângulos mencionadas anteriormente obtemos que $\angle FAM \equiv \angle CAA'$ e $\angle AFM \equiv \angle ACA'$.

Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle AFM$ e $\triangle ACA'$ são semelhantes, donde, $\frac{FM}{CA'} = \frac{AF}{AC}$.

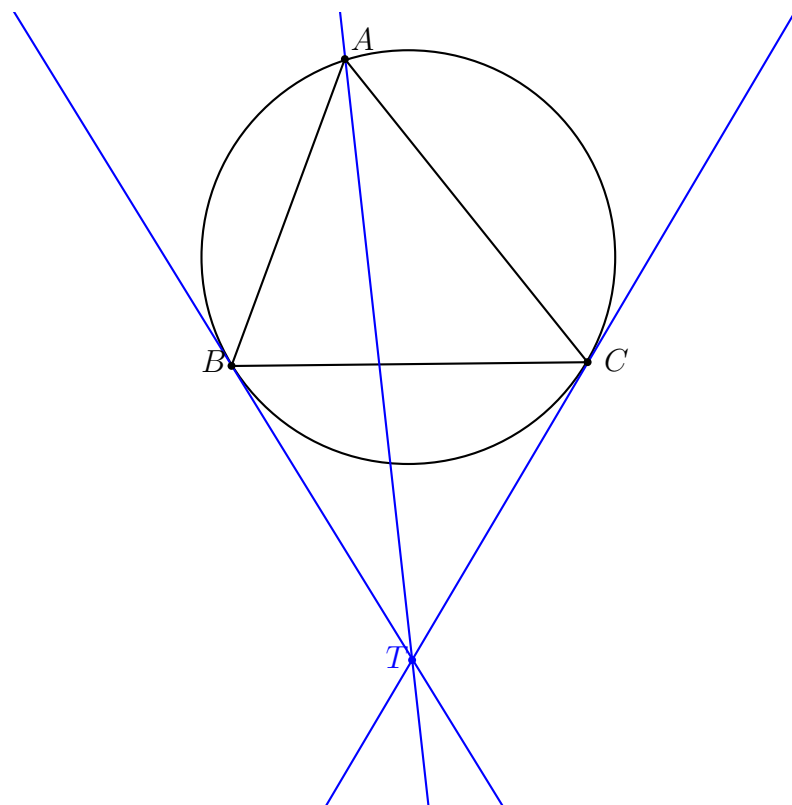
De forma análoga, prova-se que os triângulos $\triangle AME$ e $\triangle AA'B$ são semelhantes, donde $\frac{EM}{BA'} = \frac{AE}{AB}$.

Usando que $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ podemos então concluir que $\frac{FM}{CA'} = \frac{EM}{BA'}$ isto é,

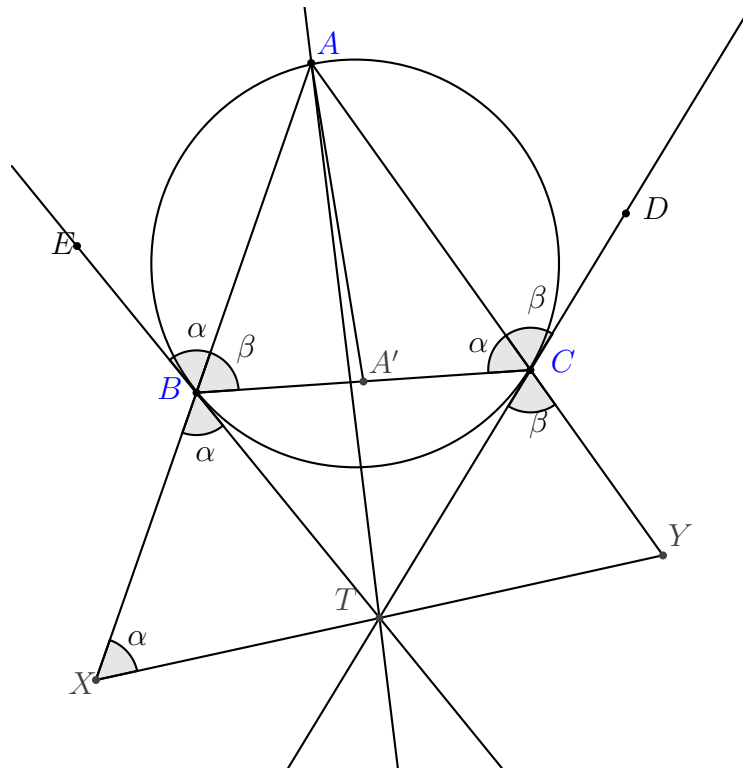
$$\frac{EM}{FM} = 1$$

□

Teorema 5.2.8. *Quando tangentes à circunferência circunscrita de um triângulo acutângulo em dois dos seus vértices se intersectam, então o seu ponto de interseção pertence à mediana do terceiro vértice.*



Demonstração. Consideremos a notação usada na figura.



Consideremos o triângulo $\triangle ABC$, a circunferência circunscrita ao triângulo e as duas tangentes à circunferência nos pontos B e C.

As duas tangentes, por hipótese, intersectam-se no ponto denotado por T.

Usando as propriedades dos ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência, ângulos verticalmente opostos e tangentes e cordas, obtemos que $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \beta$ e $\widehat{ACB} = \widehat{ABE} = \alpha$.

Consideremos o ponto X, interseção da reta (AB) com a circunferência incidente em B e centro em T.

Temos que o triângulo $\triangle BTX$ é isósceles ($BT = XT$, pois são dois raios da circunferência de centro T) e obtemos $\angle XBT \equiv \angle BXT$.

Seja Y o ponto de interseção da reta (XT) com a reta (AC).

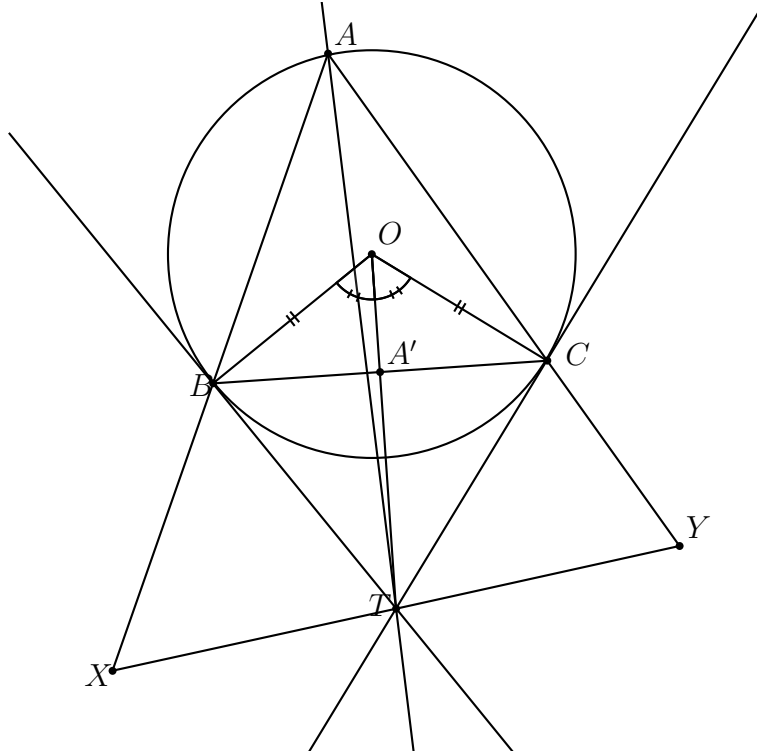
Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AXY$. Temos que

$$\begin{aligned}\angle A &\equiv \angle A \\ \angle ACB &\equiv \angle AXY\end{aligned}$$

Logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AXY$ são semelhantes, donde $\widehat{AYX} = \widehat{ABC} = \beta$, o que nos leva a concluir que o triângulo $\triangle TYC$ é isósceles (2 ângulos iguais).

Então, $YT = CT$.

Consideremos agora os triângulos $\triangle OTC$ e $\triangle OTB$, onde O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



Temos que $OT = OT$ e $OC = OB$ (raios da circunferência) e $\angle COT \equiv \angle BOT$ pois $\angle OCT \equiv \angle OBT$ e $\angle OCB \equiv \angle OBC$. Então, pelo critério LAL de congruência de triângulos, os triângulos $\triangle OBT$ e $\triangle OCT$ são congruentes.

Logo, $CT = BT$. Donde se conclui que $XT = TY$, o que faz com que AT seja a mediana do triângulo $\triangle AXY$.

Podemos concluir que $\frac{BC}{YX} = \frac{A'C}{TX}$.

Consideremos os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle AXY$. Temos que $\angle ACB \equiv \angle AXY$ e $\angle ABC \equiv \angle AYX$, logo pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle AXY$ são semelhantes.

Podemos então concluir que $\frac{AB}{AY} = \frac{AC}{AX} = \frac{BC}{XY}$.

Finalmente, consideremos os triângulos $\triangle ACA'$ e $\triangle AXT$.

Como $\frac{BC}{YX} = \frac{A'C}{TX}$ e $\frac{AC}{AX} = \frac{BC}{XY}$, obtemos $\frac{A'C}{TX} = \frac{AC}{AX}$.

Sabemos também que $\angle ACA' \equiv \angle AXT$.

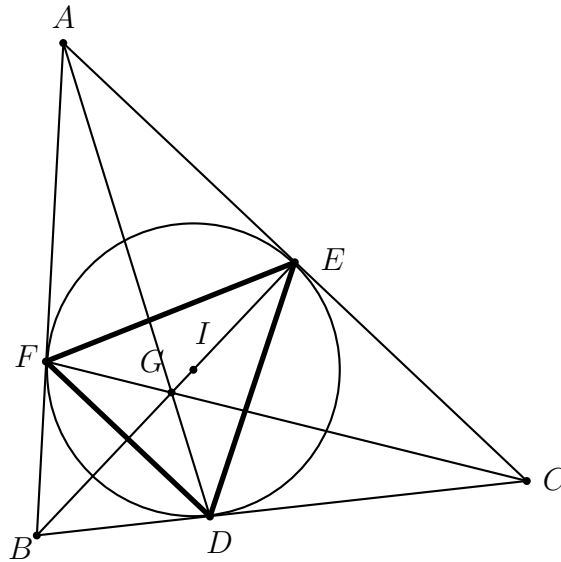
Logo, pelo critério de semelhança de triângulos LAL, os triângulos $\triangle ACA'$ e $\triangle AXT$ são semelhantes, donde se pode concluir que $\angle A'AC \equiv \angle TAX$, isto é,

$\dot{A}T$ é a semediana de $\dot{A}A'$.

□

Definição 5.2.9 (Triângulo de Gergonne). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Consideremos a circunferência inscrita no triângulo.*

O triângulo de Gergonne é o triângulo formado pelos pontos de tangência da circunferência no triângulo.



Teorema 5.2.10. *O ponto de Gergonne de um triângulo é o ponto semediano do seu triângulo de Gergonne.*

Demonstração. Consideremos o triângulo $\triangle DEF$, o triângulo de Gergonne do triângulo $\triangle ABC$.

Temos que a circunferência inscrita no triângulo $\triangle ABC$ é a circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle DEF$ (por construção do triângulo de Gergonne).

Pelo resultado anterior, temos que as tangentes aos vértices D e E, isto é, $[BC]$ e $[AC]$ respectivamente, intersectam a semediana do vértice F. Por conseguinte, esta semediana é exactamente $\dot{C}F$.

De forma análoga, as duas restantes semedias são $\dot{B}E$ e $\dot{A}D$.

Por definição do ponto de Gergonne (ponto de interseção das semirretas $\dot{C}F$, $\dot{B}E$ e $\dot{A}D$), temos que as semedias $\dot{A}D$, $\dot{B}E$ e $\dot{C}F$ interseitam o ponto de Gergonne.

□

5.3 Pontos de Brocard

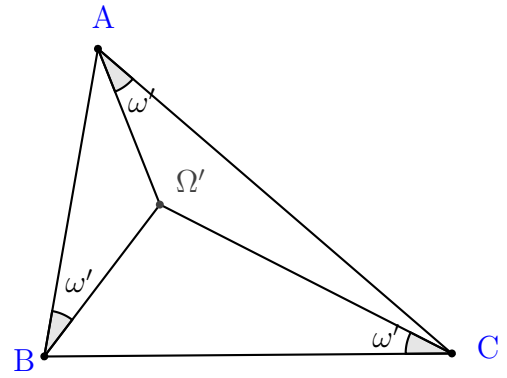
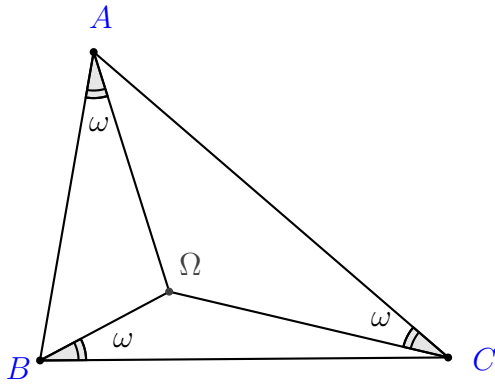
Teorema 5.3.1 (Pontos de Brocard). *Em qualquer triângulo $\triangle ABC$, existe um e um só ponto Ω tal que*

$$\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C = \Omega\hat{C}A = \omega$$

e um e um só ponto Ω' tal que

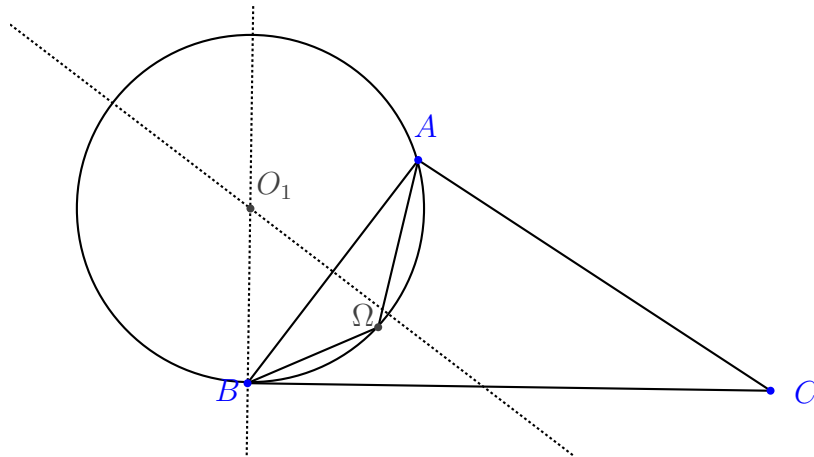
$$\Omega'\hat{B}A = \Omega'\hat{A}C = \Omega'\hat{C}B = \omega'$$

Esses dois pontos são chamados pontos de Brocard do triângulo.



Chamamos a Ω o primeiro ponto de Brocard e a Ω' o segundo ponto de Brocard do triângulo $\triangle ABC$; chamamos a ω ângulo de 1º ponto de Brocard e a ω' o ângulo do 2º ponto de Brocard.

De seguida, vamos mostrar que se Ω existe, então este pertence ao arco da circunferência tangente a (BC) que passa por A e que está no semiplano limitado por (AB) que contém C .



Note-se que o centro O_1 desta circunferência é obtido como o ponto de interseção da reta perpendicular a $[BC]$ em B e da mediatriz de $[AC]$.

Suponhamos que Ω , o 1º ponto de Brocard, existe e seja \mathcal{C} a circunferência que passa por A , B e Ω . Como ω é um ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$, Ω deve pertencer ao arco de \mathcal{C} que está no semiplano limitado pela reta (AB) e que contém C .

Como $\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C$ podemos deduzir, pela propriedade da Tangente e Cordas (ver Cap. 2), que a reta (BC) é tangente à circunferência \mathcal{C} .

Assim, \mathcal{C} é exatamente a circunferência tangente a (BC) que passa por A . Seja c_1 esta circunferência. De modo análogo, seja c_2 (respetivamente c_3) a circunferência tangente a (CA) (respetivamente (AB)) que passa por B e C (respetivamente C e A).

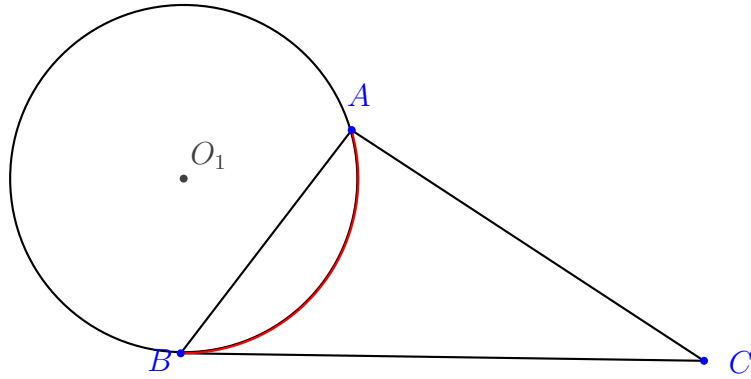
Usando o mesmo argumento, podemos dizer que Ω pertence a c_2 e c_3 .

Temos então, que o 1º ponto de Brocard é exatamente o ponto de interseção destas 3 circunferências.

Note-se que este é um processo de construção do 1º ponto de Brocard, pois o centro O , de c_1 é exatamente o ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ e da reta perpendicular a BC em B .

Proposição 5.3.2. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\hat{A} \geq \hat{B}$.*

Seja c_1 circunferência que passa por A e B e que é tangente a (BC) em B . Então o arco de c_1 de extremidades A e B que está no semiplano definido pela reta (AB) e pelo ponto C , é um arco menor e está no interior do triângulo $\triangle ABC$.

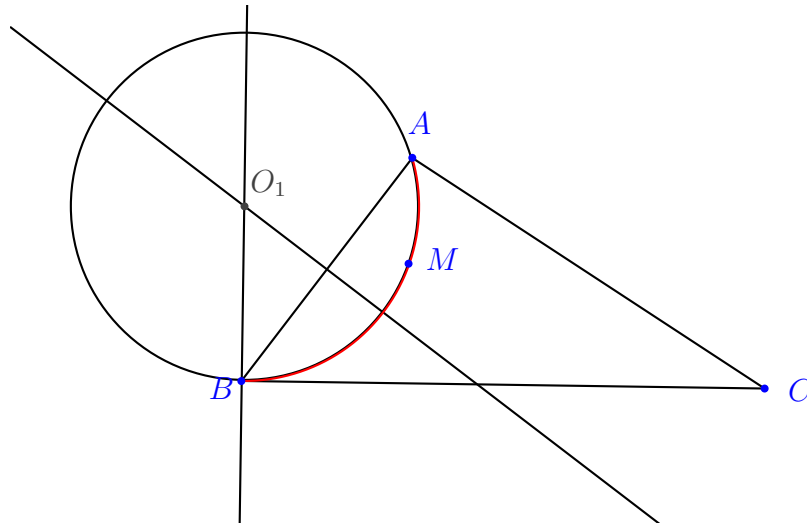


Demonstração. Seja O_1 o centro de c_1 .

Como $\hat{A} \geq \hat{B}$, temos necessariamente $\hat{B} < 90^\circ$. Logo, a perpendicular a (BC) em B está no exterior do triângulo.

Como O_1 está nesta reta e na mediatriz de $[AB]$, podemos dizer que O_1 está no semiplano limitado pela reta (AB) que não contém C .

Logo, o arco de extremidades A e B que está no semi-plano limitado pela reta (AB) que contém C é um arco menor.



Seja M um ponto deste arco.

Para mostrar que M está no interior de $\triangle ABC$ basta ver que $\hat{MAB} < \hat{A}$ e $\hat{MBA} < \hat{B}$. Como o arco é menor temos que $\angle AMB$ é suplementar a metade do ângulo $\angle AOB$ e podemos calcular que:

$$\widehat{AMB} = 90^\circ + \delta \text{ onde } \delta = \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

Assim, no triângulo $\triangle AMB$ temos:

$$M\hat{A}B + M\hat{B}A + 90^\circ + \delta = 180^\circ$$

Como $\delta = 90^\circ - \hat{B}$ obtemos:

$$M\hat{A}B + M\hat{B}A = \hat{B}$$

Como $M\hat{A}B$ e $M\hat{B}A$ não são ângulos nulos temos necessariamente

$$M\hat{A}B < \hat{B} \text{ e } M\hat{B}A < \hat{B}.$$

Como $\hat{B} \leq \hat{A}$, podemos finalmente concluir que $M\hat{A}B < \hat{A}$ e $M\hat{B}A < \hat{B}$, o que permite dizer que o ponto M está no interior do $\triangle ABC$.

□

Demonstração. Teorema 5.3.1

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\hat{A} \geq \hat{B}$ e $\hat{A} \geq \hat{C}$.

Como anteriormente, consideremos as circunferências c_1 , c_2 e c_3 tangentes a (BC), (CA), (AB) respetivamente e que passam por A e B, B e C, C e A respetivamente.

Sejam O_1 , O_2 , O_3 os centros destas circunferências. As circunferências c_1 e c_3 intersectam-se em A. Se fossem tangentes, os pontos O_1 , A e O_3 seriam colineares e (O_3A) seria perpendicular a (AC). Como O_3 pertence à mediatriz de [AC], isto não é possível e podemos concluir que c_1 e c_3 não são tangentes.

Logo, c_1 e c_3 têm um 2º ponto em comum. Seja Ω esse ponto. Como c_3 é tangente a (AB) e passa por C, c_3 está contida no semiplano definido pela reta (AB) e o ponto C.

Logo, Ω pertence ao arco de c_1 que está neste semiplano.

Como $\hat{A} \geq \hat{B}$, sabemos pela proposição anterior que este arco está contido no interior do triângulo $\triangle ABC$.

Portanto, podemos dizer que Ω está no interior do triângulo.

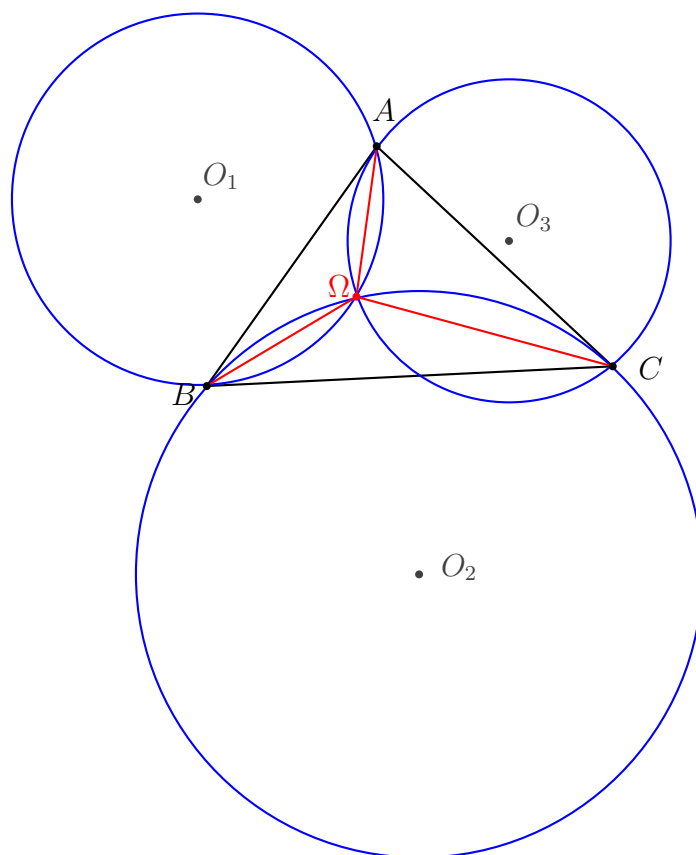
Como Ω pertence a c_1 , temos que $\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C$. Como Ω pertence a c_3 , temos que $\Omega\hat{C}A = \Omega\hat{A}B$, isto é, $\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C = \Omega\hat{C}A$.

Como $\Omega\hat{B}C = \Omega\hat{C}A$, podemos também concluir que Ω pertence a c_2 .

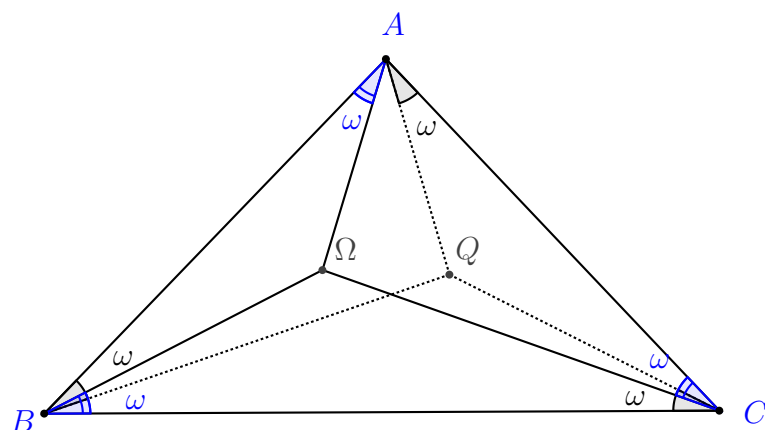
Provamos assim a existência do 1º ponto de Brocard e vimos que este ponto é o ponto de interseção das três circunferências. c_1 , c_2 , c_3 , o que garante a sua unicidade.

Da mesma forma se prova a existência e unicidade do 2º ponto de Brocard.

□



Teorema 5.3.3. *Os pontos de Brocard são conjugados isogonais e os ângulos correspondentes são iguais.*



Demonstração. Consideremos um triângulo $\triangle ABC$.

Seja Ω o 1º ponto de Brocard. O seu conjugado será um ponto Q interior ao triângulo $\triangle ABC$, tal que $\Omega\hat{A}B = Q\hat{A}C$, $\Omega\hat{B}C = Q\hat{B}A$ e $\Omega\hat{C}A = Q\hat{C}B$.

Como Ω é o 1º ponto de Brocard, temos que $\Omega\hat{A}B = \Omega\hat{B}C = \Omega\hat{C}A = \omega$, donde obtemos que $Q\hat{A}C = Q\hat{B}A = Q\hat{C}B$, isto é, o ponto Q é o 2º ponto de Brocard.

Podemos em particular concluir que o ângulo ω' é igual ao ângulo ω .

□

Bibliografia

- [1] Honsberger, R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, 1995
- [2] Johnson, R. A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., 1960
- [3] Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America , 1967
- [4] Grinberg, D., *Isogonal conjugation with respect to a triangle*, version 23 September 2006, <http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html>
- [5] Santos, A. R. S. & Viglioni, H. H. B, *Geometria Euclidiana Plana*, 2011, <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAenhkAF/geometria-euclideana-plana>
- [6] Fernandez, L., *Notas de Geometria I. Licenciatura em Ensino de Matemática*, Universidade do Minho, 2003
- [7] Fernandez, L., *Notas de Geometria II. Licenciatura em Ensino de Matemática*, Universidade do Minho, 2004
- [8] Vandembroucq, L., *Elementos de Geometria - Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores*, Universidade do Minho
- [9] Araújo, P., *Curso de Geometria*, Gradiva, 3ªedição Outubro 2002
- [10] Bogomolny, A, <http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml>